A1 $\langle x,y\rangle = x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} y$ und $\mathcal{U} = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= c_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{= c_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= c_3} \right\rangle$

a) <u>1. Berechne ONB von $\mathcal{U}$.</u>

$$\|c_1\| = 4 \quad , \quad b_1 = \frac{1}{2} c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_2 = c_2 - \langle b_1, c_2\rangle b_1 = c_2 - (1\ 0\ 0\ 0\ 0)\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot b_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} , \quad \|\tilde{b}_2\| = \sqrt{(0\ 4\ -4\ 0\ -2)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}} = 2$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_3 = c_3 - \langle c_3, b_1\rangle b_1 - \langle c_3, b_2\rangle b_2$$

$$= c_3 - (-1\ -1\ 1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot b_1 - (-1\ -1\ 1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot b_2$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und $\|\tilde{b}_3\| = \sqrt{(0\ 1\ -1\ 0\ -1)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}} = 1$, $b_3 = \tilde{b}_3$

(b_1, b_2, b_3) ist ONB von $\mathcal{U}$.

Ergänze durch $b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu Basis von V.

Das ist bereits eine ONB, denn:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b_4 \perp \{b_1, b_2, b_3, b_5\} \text{ und } \|b_4\| = 1$$

$$\begin{pmatrix} & & " & & \end{pmatrix} b_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b_5 \perp \{b_1, b_2, b_3, b_4\} \text{ und } \|b_5\| = 1.$$

(b) Projiziere $p = (0\ 0\ 1\ 1\ 0)^T$ auf U_1 III

$$q = \langle p, b_1 \rangle b_1 + \langle p, b_2 \rangle b_2 + \langle p, b_3 \rangle b_3$$

$$= (0\ 0\ 1\ 1\ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot b_1 + (0\ 2\ -2\ 0\ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot b_2$$

$$+ (0\ 1\ -1\ 0\ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot b_3$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow d(p, U) = \| p \| = \sqrt{(0\ 0\ 1\ 1\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}.$$

Das Lot von p auf U ist $\{ \lambda \cdot p \mid \lambda \in [0, 1] \}$

(c)

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Dann ist $d(g, \mathcal{U}) = \left\| \pi_W \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\1 \end{pmatrix} \right\|$ für $W = \left(\mathcal{U} + \left\langle \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\rangle \right)^{\perp}$

Aber $\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}$, also ist $d(g, \mathcal{U}) = \left\| \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\1 \end{pmatrix} - \pi_{\mathcal{U}} \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\1 \end{pmatrix} \right\|$.

Berechne $\pi_{\mathcal{U}} \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\1 \end{pmatrix} = (1\ 0\ 0\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 0\\4\\1\\0\\5 \end{pmatrix} \cdot b_1$

$$+ (0\ 2\ -2\ 0\ -1) \begin{pmatrix} 0\\4\\1\\0\\5 \end{pmatrix} \cdot b_2 + (0\ 1\ -1\ 0\ -1) \begin{pmatrix} 0\\4\\1\\0\\5 \end{pmatrix} b_3$$

$$= 1 \cdot \begin{pmatrix} 0\\2\\-2\\0\\-1 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 0\\1\\-1\\0\\-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}$$

Also ist $d(g, \mathcal{U}) = \left\| \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \right\| = (0\ 0\ 1\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0\\0 \end{pmatrix} = \underline{1}$

Die Lotfußpunkte sind $\underset{\mathcal{U}}{\overset{0}{\cap}}$ und $\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \in g$ und das

Lot ist die Strecke $\left[0, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} \right]$.

LA2 B5

A2

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Orthonormalisiere die Spalten $s_1 - s_4$ und erhalte $t_1 - t_4$:

$$\|s_1\|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}; \quad t_1 = \sqrt{2}\, s_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{t}_2 = s_2 - \langle s_2, t_1 \rangle t_1 = s_2 - 2\langle s_2, s_1 \rangle s_1 = s_2 - s_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\tilde{t}_2\| = 2 \Rightarrow t_2 = \frac{1}{2} s_2 - \frac{1}{2} s_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{t}_3 = s_3 - \langle s_3, t_1 \rangle t_1 - \langle s_3, t_2 \rangle t_2 = s_3 - 2\langle s_3, s_1 \rangle s_1 - \frac{1}{2}(s_2 - s_1)$$

$$= s_3 + s_1 - \frac{1}{2} s_2 + \frac{1}{2} s_1 = s_3 + \frac{3}{2} s_1 - \frac{1}{2} s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t_3 \text{ da schon normiert.}$$

$$\tilde{t}_4 = s_4 - \langle s_4, t_1 \rangle t_1 - \langle s_4, t_2 \rangle t_2 - \langle s_4, t_3 \rangle t_3$$

$$= s_4 - 2\langle s_4, s_1 \rangle s_1 - \frac{1}{2}(s_2 - s_1) - \left(s_3 + \frac{3}{2} s_1 - \frac{1}{2} s_2\right)$$

$$= s_4 + s_1 - \frac{1}{2} s_2 + \frac{1}{2} s_1 - s_3 - \frac{3}{2} s_1 + \frac{1}{2} s_2$$

$$= s_4 - s_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|\tilde{t}_4\|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow t_4 = \sqrt{2} \cdot \tilde{t}_4 = \sqrt{2}\,(s_4 - s_3) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \cancel{\sqrt{2}} \quad B^{-1}$$

mit $B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

<u>Invertiere B:</u>

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} \sqrt{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \big] + \\ \leftarrow \\ \big] + \end{array}$$

$$2\cdot \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \; + \; - \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

~~[illegible]~~