Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Tobias Columbus

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Der reelle Vektorraum $V = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(f) \leq 2\}$ sei mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=0}^{2} f(i) \cdot g(i)$$

versehen. Weiter seien $W = \{f \in V \mid \deg(f) \leq 1\}$ und $j\colon W \to V$ die Inklusion. Wir versehen W mit der Einschränkung des Skalarprodukts auf V. Schließlich sei $D\colon V \to W$ die lineare Abbildung $D(f) = f'$, wobei f' die Ableitung von f nach X bezeichnet.

(a) Berechnen Sie die adjungierte Abbildung j^* von j.

(b) Berechnen Sie die adjungierte Abbildung D^* von D.

(c) Zeigen Sie, dass $W^\perp$ aus Eigenvektoren von $(j \circ D)^*$ besteht und berechnen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es $V = \mathbb{C}^4$ mit dem Standardskalarprodukt und $\Phi \in \operatorname{End}(V)$ der Endomorphismus

$$v \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 2\mathrm{i} & 2 \\ -2\mathrm{i} & -2 & 3-3\mathrm{i} & 0 \\ -2 & -2\mathrm{i} & 0 & 3-3\mathrm{i} \end{pmatrix} \cdot v\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass Φ normal ist.

(b) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von Φ.
Hinweis: $\lambda = \mathrm{i} - 1$ ist ein Eigenwert von Φ.

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $D_{B,B}(\Pi_\lambda)$ der Projektionen Π_λ aus der Spektralzerlegung $\Phi = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\Phi)} \lambda\, \Pi_\lambda$ von Φ bzgl. der Standardbasis von V.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es seien U, V und W endlich-dimensionale, euklidische Vektorräume und $V^\vee$ und $W^\vee$ seien die Dualräume von V und W. Weiter sei $\Phi\colon V \to W$ ein Homomorphismus mit dualer Abbildung $\Phi^\vee\colon W^\vee \to V^\vee$. Schließlich seien $j_V\colon V \to V^\vee$ und $j_W\colon W \to W^\vee$ die Isomorphismen, welche durch die Skalarprodukte auf V bzw. W induziert werden.

(a) Zeigen Sie, dass die adjungierte Abbildung Φ^* nichts anderes als die Komposition $j_V^{-1} \circ \Phi^\vee \circ j_W$ ist.

(b) Schließen Sie aus Teil (a), dass $(\Phi \circ \Psi)^* = \Psi^* \circ \Phi^*$ für jeden Homomorphismus $\Psi\colon U \to V$.

(c) Schließen Sie aus Teil (a), dass $\mathrm{Bild}(\Phi)^\perp = \mathrm{Kern}(\Phi^*)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sei $\|A\| = \max\{\|Ax\| \mid x \in \mathbb{C}^n \text{ mit } \|x\| = 1\}$. Zeigen Sie:

(a) $\|A\|^2 = \max\{\lambda \mid \lambda \in \operatorname{Spec}(A^*A)\}$.

(b) $\|A\| \geq \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \operatorname{Spec}(A)\}$.

(c) Ist A normal, so gilt in (b) Gleichheit.

(d) Im Allgemeinen gilt in (b) keine Gleichheit.

Abgabe bis spätestens Freitag, den 03. 06. 2016, um 13:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die gelben Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums an!

1 Erste Bemerkung

Wenn V ein endlich-dimensionaler, unitärer Vektorraum mit Dualraum $V^\vee$ ist, so ist die Zuordnung

$$\begin{aligned} j_V \colon V &\to V^\vee \\ v &\mapsto \langle \cdot, v \rangle \end{aligned}$$

erst einmal kein Isomorphismus von Vektorräumen, da

$$j_V(\lambda v) = \langle \cdot, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle \cdot, v \rangle = \overline{\lambda} j_V(v)$$

und j_V somit nicht linear ist. Das kann man reparieren, wenn man die Skalarmultiplikation $\star$ auf $V^\vee$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $f \colon V \to \mathbb{C}$ als

$$(\lambda \star f)(x) = \overline{\lambda} f(x)$$

definiert. Dann ist $V^\vee$ wieder ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und j_V ist tatsächlich eine lineare Abbildung. Darüberhinaus ist j_V injektiv, da $\langle \cdot, v \rangle(v) = 0$ nur für $v = 0$ auftritt. Da V und $V^\vee$ beide endlich-dimensional sind, ist j_V also ein Isomorphismus.

2 Zweite Bemerkung

Anstatt $j_V^{-1} \Phi^\vee j_W = \Phi^*$ auszurechnen, kann man auch $\Phi^\vee j_W = j_V \Phi^*$ ausrechnen. Sowohl die linke als auch die rechte Seite der zweiten Gleichung sind Homomorphismen $W \to V^\vee$ und man rechnet nach, dass

$$\Phi^\vee j_W(w) = \Phi^\vee(\langle \cdot, w \rangle) = \langle \Phi(\cdot), w \rangle$$

und

$$j_V \Phi^*(w) = \langle \cdot, \Phi^*(w) \rangle = \langle \Phi(\cdot), w \rangle.$$