

A4 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\|A\| := \max \{ \|Ax\| \mid \|x\| = 1 \}$

(a) A^*A ist normal $\Rightarrow \exists$ ONB aus Eigenvektoren
 $\{b_1, \dots, b_n\}$, $A^*A b_i = \lambda_i b_i$
 $\uparrow$ reell, weil selbst adjungiert

Dann ist für $x = \sum_{i=1}^n \mu_i b_i$ offenbar

$$\langle Ax, Ax \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \mu_i A b_i, \mu_j A b_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \cancel{\langle \mu_i A b_i, \mu_j A b_j \rangle} \mu_i \mu_j b_i^* A^* A b_j$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_i \mu_j b_i^* b_j$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i^2$$

$$\leq \max \{ \lambda_j \mid j \} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \mu_i^2 \right)$$

$= 1$ für $\|x\| = 1$

$$\Rightarrow \|A\|^2 \leq \max \{ \lambda \in \text{Spec}(A^*A) \}$$

Aber $\leftarrow$ obere Wert wird angenommen $\Rightarrow$ Beh.

(X)

- (b) Sei λ ein Eigenwert von A
 $\Rightarrow \bar{\lambda}$ ist ein Eigenwert von A^* zum selben EV.
 $\Rightarrow \lambda \bar{\lambda}$ ist Eigenwert von $A^* A$
 $\Rightarrow \max \{ |\lambda|^2 \mid \lambda \in \text{Spec } A \} \leq \max \{ \lambda \mid \lambda \in \text{Spec}(A^* A) \}$
 $= \|A\|^2$

- (c) Ist A normal, so gibt es Basis aus EV.
 $\Rightarrow \text{Spec } A^* A = \{ |\lambda|^2 \mid \lambda \in \text{Spec } A \}$
 $\Rightarrow$ Gleichheit in b)

- d) Betrachte $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\text{Spec } A = \{0\}$.

Aber $\|A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 1$