Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Tobias Columbus

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei Φ eine Isometrie des $\mathbb{R}^3$ mit $\det(\Phi) = 1$ und $\mathrm{Spur}(\Phi) = 2$. Weiter sei $B = (b_1, b_2, b_3)$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$, so dass $D_{B,B}(\Phi)$ in Isometrienormalform vorliegt. Schließlich sei Σ die Spiegelung an der Hyperebene $\{\alpha \cdot (b_1 + b_2) + \beta \cdot b_3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie die Isometrienormalform von Φ.

(b) Zerlegen Sie Φ in eine Komposition von Spiegelungen an Hyperebenen.

(c) Bestimmen Sie die Isometrienormalform von $\Psi = \Sigma^{-1} \circ \Phi \circ \Sigma$ sowie eine Orthonormalbasis C des $\mathbb{R}^3$, so dass $D_{C,C}(\Psi)$ in Isometrienormalform vorliegt.

(d) Bestimmen Sie die Isometrienormalform von $\Theta = \Sigma \circ \Phi$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum von V. Für einen Punkt $v \in V$ betrachten wir die Menge $v + U = \{v + u \mid u \in U\}$. Zeigen Sie:

(a) Die Addition in V macht $v + U$ zu einem affinen Raum mit Richtungsvektorraum U.

(b) Für jeden weiteren Untervektorraum $W \subseteq V$ ist $W \cap (v + U)$ ein affiner Unterraum von $v + U$.

(c) Ist $v \notin U$, so ist jeder affine Unterraum von $v + U$ von der Gestalt $W \cap (v + U)$ für einen Untervektorraum $W \subseteq V$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Wie viele Untervektorräume der Dimension 1 hat $\mathbb{F}_5^2$?

(b) Wie viele affine Unterräume der Dimension 1 hat der affine Standardraum $\mathbb{A}^2$ über $\mathbb{F}_5$?

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Finden Sie einen affinen Raum $\mathbb{A}$ und eine Teilmenge $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$, so dass

(i) $\mathbb{B}$ kein affiner Unterraum von $\mathbb{A}$ ist, aber

(ii) für je zwei verschiedene Punkte $P, Q \in \mathbb{B}$ auch die Verbindungsgerade PQ von P und Q in $\mathbb{B}$ liegt.

Abgabe bis spätestens Freitag, den 17. 06. 2016, um 13:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die gelben Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums an!