Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Tobias Columbus

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei $\mathbb{A}$ ein n-dimensionaler affiner Raum über einem Körper K mit Richtunsvektoren V und einem Koordinatensystem $S = (O; B)$. Weiter sei $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ eine affine Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass es $a \in K^n$ und $A \in K^{n\times n}$ gibt, so dass

$$D_S(\varphi(P)) = a + A \cdot D_S(P)$$

für alle $P \in \mathbb{A}$.

(b) Können Sie an $a \in K^n$ und $A \in K^{n\times n}$ aus Teil (a) erkennen, ob φ eine Affinität ist?

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei $\mathbb{A}$ ein reeller, vierdimensionaler affiner Raum mit Richtungsvektorraum V und einem affinen Koordinatensystem $K = (O; b_1, b_2, b_3, b_4)$. Weiter seien $\mathbb{B}_1$ die affine Hülle der Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 mit den Koordinaten

$$\begin{aligned} D_K(P_1) &= (-4, -2, 3, 1), & D_K(P_2) &= (-3, -1, 2, 0),\\ D_K(P_3) &= (1, -2, 4, 3), & D_K(P_4) &= (2, -1, 3, 2) \end{aligned}$$

und $\mathbb{B}_2$ der durch die Lösungsmenge $L \subseteq \mathbb{R}^4$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 9x_4 & = & 6\\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -4 \end{array}$$

gegebene affine Unterraum $\mathbb{B}_2 = \{P \in \mathbb{A} \mid D_K(P) \in L\}$ von $\mathbb{A}$.

(a) Berechnen Sie Parameterdarstellungen $U + P$ mit einem Punkt $P \in \mathbb{A}$ und einem Untervektorraum $U \subseteq V$ der affinen Teilräume $\mathbb{B}_1$, $\mathbb{B}_2$ und $\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2$.

(b) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem mit Lösungsmenge L' an, so dass die affine Hülle von $\mathbb{B}_1 \cup \mathbb{B}_2$ genau die Menge $\{P \in \mathbb{A} \mid D_K(P) \in L'\}$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es seien $(\mathbb{A}, V)$ und $(\mathbb{B}, W)$ affine Räume über demselben Körper K. Weiter seien $A \in \mathbb{A}$ und $B \in \mathbb{B}$ fest gewählte Punkte und $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) φ ist eine affine Abbildung.

(ii) Für alle $k \in \mathbb{N}$, alle $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{A}$ mit $Q_i = \varphi(P_i)$ und alle $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ mit $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ gilt die Implikation

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{AP_i} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{BQ_i} = 0.$$

(iii) Für alle $k \in \mathbb{N}$, alle $P_0, P_1, \dots, P_k \in \mathbb{A}$ mit $Q_i = \varphi(P_i)$ und alle $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ mit $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ gilt die Implikation

$$\overrightarrow{AP_0} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{AP_i} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{BQ_0} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{BQ_i}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es seien $\mathbb{A}$ ein affiner Raum über einem Körper K und g_1, g_2 und g_3 drei paarweise verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt $O \in \mathbb{A}$ schneiden. Weiter seien für $1 \leq i \leq 3$ von O verschiedene Punkte $P_i, Q_i \in g_i$ gegeben, so dass $P_1P_2 \parallel Q_1Q_2$ und $P_2P_3 \parallel Q_2Q_3$.

(a) Skizzieren Sie für $K = \mathbb{R}$ und einen zweidimensionalen affinen Raum $\mathbb{A}$ die beschriebene Situation.

(b) Zeigen Sie, dass $P_1P_3 \parallel Q_1Q_3$.

Abgabe bis spätestens Freitag, den 24. 06. 2016, um 13:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die gelben Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums an!