Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Tobias Columbus

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es seien $\mathbb{A}$ ein dreidimensionaler, reeller affiner Raum mit Koordinatensystem $K = (M; b_1, b_2, b_3)$ und $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ die affine Abbildung mit

$$D_K(\varphi(P)) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -6 \\ -4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot D_K(P) + \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix} \text{ für alle } P \in \mathbb{A}.$$

(a) Berechnen Sie die Fixpunkte, Fixgeraden und Fixrichtungen von φ.

(b) Zeigen Sie, dass es ein Koordinatensystem $L = (N; c_1, c_2, c_3)$ und Konstanten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $P \in \mathbb{A}$

$$D_L(\varphi(P)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot D_L(P) + \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie solch ein Koordinatensystem L sowie die Konstanten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

(c) Bestimmen Sie die Fixebenen von φ.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei $\mathbb{A}$ ein n-dimensionaler affiner Raum mit $n \geq 2$. Weiter sei φ eine von der Identität verschiedene Affinität von $\mathbb{A}$, so dass

(i) φ einen Fixpunkt $O \in \mathbb{A}$ hat.

(ii) für je zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{A}$, die keine Fixpunkte von φ sind, die Gerade $P\varphi(P)$ parallel zur Geraden $Q\varphi(Q)$ ist.

Zeigen Sie, dass es eine Hyperebene $H \subset \mathbb{A}$ gibt, die von φ punktweise fixiert wird.

Aufgabe 3 (8 Punkte)
Es seien K ein Körper mit $\mathbb{Q} \subseteq K$, $n > 1$, und $\varphi\colon K^n \to K^n$ eine bijektive, geradentreue Abbildung mit $\varphi(0) = 0$. Weiter seien $P, Q \in K^n$ linear unabhängig und $E = [0, P, Q]$. Zeigen Sie:

(a) $\varphi(E)$ ist eine Ebene.

(b) Es gibt einen Automorphismus ξ des Vektorraums K^n, so dass für $\psi = \xi \circ \varphi$ gilt:

  (i) $\psi(E) = E$.

  (ii) 0, P und Q sind Fixpunkte von ψ.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind nP und nQ Fixpunkte von ψ.

(d) Für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$ sind αP und αQ Fixpunkte von ψ.

(e) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ ist $\alpha P + \beta Q$ ein Fixpunkt von ψ.

(f) φ ist $\mathbb{Q}$-linear.

(g) φ ist nicht notwendigerweise K-linear.

Hinweis: Betrachten Sie für die Teilaufgaben (c), (d) und (e) die Einschränkung $\psi|_E$ von ψ auf E und nutzen Sie die Eigenschaften von geradentreuen Abbildungen in der Ebene. Die Aussage in Teilaufgabe (f) lässt sich sich dann aus Teilaufgabe (e) folgern.

Aufgabe 4 (4 Bonuspunkte)
Es sei Φ ein nicht-injektiver Endomorphismus des $\mathbb{C}^4$, dessen charakteristisches Polynom von $(X-3)^2$ geteilt wird und dessen Minimalpolynom von Grad 3 ist. Weiter sei $\mathrm{Spur}(\Phi) = 6$ und es gebe ein $v \in \mathbb{C}^4$ mit $v \in \mathrm{Kern}((\Phi - 3 \cdot \mathrm{id})^2)$ und $v \notin \mathrm{Kern}(\Phi - 3 \cdot \mathrm{id})$. Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von Φ.

Abgabe bis spätestens Freitag, den 01. 07. 2016, um 13:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die gelben Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums an!