Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Tobias Columbus

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei $\mathbb{E}$ der 4-dimensionale, euklidische Standardraum. Weiter seien $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ die affinen Unterräume von $\mathbb{E}$, welche durch

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

beziehungsweise

$$\mathbb{B} = \left\{ x \in \mathbb{E} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben sind. Bestimmen Sie ein gemeinsames Lot von $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ sowie den Abstand $d(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ zwischen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Es seien $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, K ein Körper von Charakteristik ungleich 2 und $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ das Polynom

$$f(x) = x^\top A x + 2\, b^\top x + c$$

mit symmetrischer Matrix $A \in K^{n \times n}$, $b \in K^n$ und $c \in K$. Weiter sei $\varphi\colon K^n \to K^n$ eine Affinität mit $\varphi(y) = Cy + d$ für $C \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $d \in K^n$. Schließlich sei g das Polynom $g(y) = (f \circ \varphi)(y)$.

(a) Zeigen Sie, dass $g(y) = y^\top A' y + 2\, b'^\top y + c'$ mit $A' = C^\top A C$, $b' = C^\top(Ad + b)$ und $c' = f(d)$.

(b) Geben Sie ein Koordinatensystem L des K^n an, so dass

$$\{x \in K^n \mid f(x) = 0\} = \{y \in K^n \mid g(D_L(y)) = 0\}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es seien $\mathbb{A}$ ein affiner Raum und $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ eine Projektion, d. h. eine affine Abbildung mit $\varphi \circ \varphi = \varphi$. Weiter bezeichne Φ den zu φ gehörigen Endomorphismus der Richtungsvektoren von $\mathbb{A}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\varphi(\mathbb{A})$ die Menge der Fixpunkte von φ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\varphi(\mathbb{A}) \cap (P + \mathrm{Kern}(\Phi)) = \{\varphi(P)\}$ für alle $P \in \mathbb{A}$.

(c) Es sei nun $\mathbb{A} = \mathbb{R}^3$ und $\varphi(x) = Ax + b$ eine Projektion mit $\varphi(e_1) = e_3$, $\varphi(e_2) = e_1 - e_3$. Berechnen Sie A und b.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Klassifizieren Sie die Bewegungen des $\mathbb{R}^3$ indem Sie zeigen, dass es zu jeder Bewegung φ ein cartesisches Koordinatensystem L des $\mathbb{R}^3$ gibt, so dass $D_{LL}(\varphi) = (A, \lambda e_1)$ mit $\lambda \geq 0$ und A in Isometrienormalform. Geben Sie für jede dieser Bewegungen die Fixräume und Fixpunkte an.

Aufgabe 5 (4 Bonuspunkte)
Es seien $0 \neq V$ ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to \mathbb{C}$ eine nicht-ausgeartete hermitesche Sesquilinearform auf V.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{SU}(\beta) = \big\{\Phi \in \mathrm{Aut}(V) \mid \det(\Phi) = 1 \text{ und } \beta(\Phi(u), \Phi(v)) = \beta(u, v) \text{ für alle } u, v \in V\big\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(V)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass es einen Untervektorraum $0 \neq W \subseteq V$ gibt, so dass $\beta|_W$ definit ist.

(c) Es sei nun $W \subseteq V$ ein echter Untervektorraum von V, so dass $\beta|_W$ definit ist. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{U}(\beta|_W) = \big\{\Phi \in \mathrm{Aut}(W) \mid \beta(\Phi(u), \Phi(v)) = \beta(u, v) \text{ für alle } u, v, \in W\big\}$$

isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{SU}(\beta)$ ist.

(d) Es sei nun $V = \mathbb{C}^2$ und

$$\beta(u, v) = u^\top \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \overline{v}.$$

Zeigen Sie, dass es einen Gruppenisomorphismus zwischen $\mathrm{SO}(2)$ und einer Untergruppe von $\mathrm{SU}(\beta)$ gibt.

Sommerfest der Fakultät für Mathematik am 14. Juli 2016

Wie jedes Jahr starten wir um 18 Uhr mit einem Fußball-Turnier im Sparda-Sportpark an der Hagsfelder Allee. Im Anschluss daran sind alle zum Grillfest im 'Heimspiel' eingeladen. Brot und Getränke werden wie üblich gestellt. Grillgut usw. soll sich jede/r selbst mitbringen. Für musikalische Unterhaltung sorgt ab ca. 21 Uhr die Faculty Gang unter Leitung von Prof. Henze.

Abgabe bis spätestens Freitag, den 08. 07. 2016, um 13:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die gelben Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums an!