

Parameterdarstellung von B :

$$\text{Fußpunkt / Kern: } \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow -2 \\ \leftarrow -1 \\ \leftarrow -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -4 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow -1 \\ \leftarrow -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{y_0} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{y_1}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{y_2} \right\rangle \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}_{x_0} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{x_1}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{x_2} \right\rangle$$

$$\text{Setze } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$C^T C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & -2 \\ -1 & 5 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Löse } C^T C x = C^T (x_0 - y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 5 & -2 & 12 \\ -1 & 5 & 6 & -3 & 7 \\ 1 & -2 & -3 & 3 & -1 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow -3 \\ \leftarrow -2 \\ \leftarrow -1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{cccc|c} 0 & 8 & 8 & -8 & 8 \\ 0 & 11 & 11 & -8 & 14 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & -3 & 3 & -1 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow -8 \\ \leftarrow -14 \\ \leftarrow -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & -3 & 3 & -1 \end{array}$$

$$\text{Lösung } x = \begin{pmatrix} -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also haben wir die Lotfußpunkte

$$P = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \in A$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in B$$

$$\begin{aligned} \text{Also ist } d(A, B) &= d(P, Q) = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

Ist $W \subseteq V$ ein echter Untervektorraum, so dass $\beta|_W$ definit ist, so hat W ein orthogonales Komplement $W^\perp$. Da W ein echter Untervektorraum ist, ist $W^\perp \neq 0$ und wir finden wiederum einen Unterraum $X \subseteq W$, so dass $\beta|_X$ definit ist. Wir zerlegen V also in $V = W \oplus X \oplus X^\perp$, wo $X^\perp$ das orthogonale Komplement von X in $W^\perp$ ist.

Nun nehmen wir ein $\Phi \in U(\beta|_W)$ und sehen, dass Φ eine Isometrie bzgl. β bzw. $-\beta$ ist. Also ist $|\det(\Phi)| = 1$. Insbesondere können wir eine ONB $x_1, \dots, x_e$ von X bzgl. β bzw. $-\beta$ wählen und den Automorphismus Ψ_Φ mit

$$x_i \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\det(\Phi)} x_1 & \text{falls } i = 1 \\ x_i & \text{sonst} \end{cases}$$

betrachten. Dann lässt $\Psi = \Psi_\Phi$ unsere Bilinearform β invariant, denn

$$\beta(\Psi(x_i), \Psi(x_j)) = \begin{cases} \frac{1}{|\det(\Phi)|} \beta(x_1, x_1) & \text{falls } i = j = 1 \\ \beta(x_i, x_j) & \text{falls } i = j \neq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Außerdem ist die Zuordnung $\Phi \mapsto \Psi_\Phi$ ein Homomorphismus von Gruppen, da die Determinante multiplikativ ist.

Insgesamt können wir also einen Gruppenhomomorphismus $U(\beta|_W) \rightarrow SU(\beta)$ definieren indem wir ein $\Phi \in U(\beta|_W)$ auf die Fortsetzung von Φ durch Ψ_Φ auf X und durch die Identität auf $X^\perp$ abbilden. Konkret heißt das, dass diese Fortsetzung einen Vektor $v = w + x + y$ mit $w \in W$, $x \in X$ und $y \in X^\perp$ auf $\Phi(w) + \Psi_\Phi(x) + y$ abbildet. Man beachte, dass diese Fortsetzung auch tatsächlich Determinante 1 hat, da $\det(\Psi_\Phi) = \frac{1}{\det(\Phi)}$. Dieser Homomorphismus ist offenbar injektiv und somit haben wir einen Isomorphismus von $U(\beta|_W)$ auf eine Untergruppe von $SU(\beta)$ gefunden.

Nun können wir auch die (d) ganz einfach lösen indem wir feststellen, dass $SO(2) = U(1) = U(\langle (1 \ i)^\top \rangle)$.