Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Tobias Columbus

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Bestimmen Sie die affine Normalform der Quadrik

$$Q = \left\{ (x\ y\ z)^\top \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \,\middle|\, 3\,x^2 - 12\,xz - 3\,y^2 + 12\,yz + 24\,x - 24\,y + 2\,z - 3 = 0 \right\}$$

und geben Sie eine Affinität an, die Q in ihre Normalform überführt. Bestimmen Sie außerdem die regulären und singulären Punkte von Q.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es seien K ein Körper und $(-)' \colon K[X] \to K[X]$ die lineare Abbildung, welche ein Polynom f auf die formale Ableitung f' von f nach X abbildet. Zeigen Sie:

(a) Es gilt die Leibnizregel $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

(b) Es gilt die Kettenregel $(f(g))' = f'(g) \cdot g'$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei $d \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und

$$Q = \left\{ (x\ y)^\top \in \mathbb{A}^2(\mathbb{Q}) \,\middle|\, x^2 + y^2 = d \right\}.$$

Zeigen Sie, dass die Menge Q entweder leer ist oder unendlich viele Elemente enthält.

Hinweis: Betrachten Sie Geraden durch einen Punkt $P \in Q$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es seien a und b ganze Zahlen, $\Delta = 4\,a^3 + 27\,b^2$ und $f = y^2 - x^3 - ax - b \in \mathbb{Q}[x, y]$. Weiter seien $p > 2$ eine Primzahl, $\Delta_p = \overline{\Delta} \in \mathbb{F}_p$ und $f_p = y^2 - x^3 - \overline{a}\,x - \overline{b} \in \mathbb{F}_p[x, y]$.

(a) Zeigen Sie, dass genau dann jeder Punkt der Nullstellenmenge $N(f) \subseteq \mathbb{Q}^2$ von f nicht-singulär ist, wenn $\Delta \neq 0$.

(b) Zeigen Sie, dass genau dann jeder Punkt der Nullstellenmenge $N(f_p) \subseteq \mathbb{F}_p^2$ von f_p nicht-singulär ist, wenn $\Delta_p \neq 0$.

Abgabe bis spätestens Freitag, den 15. 07. 2016, um 13:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die gelben Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums an!