Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Tobias Columbus

Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

Übungsblatt 14

Aufgabe 1
Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und Φ ein Endomorphismus von V, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Zeigen Sie, dass die Aussagen

1. Der Endomorphismus Φ ist diagonalisierbar.
2. Jeder Φ-invariante Unterraum von V hat ein Φ-invariantes Komplement.

äquivalent sind.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie die Jordan-Normalform $\widetilde{A}$ von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

sowie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$, so dass $S\,A\,S^{-1} = \widetilde{A}$.

Aufgabe 3
Es seien Φ und Ψ zwei Endomorphismen des $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, deren charakteristische Polynome über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren zerfallen. Weiter gelte $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$. Zeigen Sie:

(a) Die Haupträume von Φ sind Ψ-invariant.

(b) Es gibt eine Basis B von $\mathbb{R}^n$, so dass

 (i) $D_{B,B}(\Phi)$ in Jordan-Normalform vorliegt, und

 (ii) $D_{B,B}(\Psi)$ eine Blockdiagonalmatrix der Form

$$D_{B,B}(\Psi) = \left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & A_r \end{array}\right)$$

 ist. Dabei ist jedes A_i eine quadratische Matrix von der Größe des i-ten Jordanblocks in $D_{B,B}(\Phi)$.

Aufgabe 4
Es seien $f\colon V \to V'$ und $g\colon W \to W'$ zwei lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen über einem Körper K. Weiter sei $V \neq 0$ und $W \neq 0$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt genau eine lineare Abbildung $f \otimes g\colon V \otimes W \to V' \otimes W'$ mit $(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes f(w)$ für alle $v \in V$ und alle $w \in W$.

(b) $f \otimes g$ ist genau dann injektiv, wenn f und g injektiv sind.

(c) $f \otimes g$ ist genau dann surjektiv, wenn f und g surjektiv sind.

Aufgabe 5
Es sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und $V = \mathbb{C}^{n\times n}$. Wir fassen V sowohl als komplexen Vektorraum als auch als reellen Vektorraum auf. Weiter seien

$$H^+ = \{A \in V \mid A^* = A\} \text{ und } H^- = \{A \in V \mid A^* = -A\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass H^+ und H^- reelle Untervektorräume des reellen Vektorraums V sind.

(b) Zeigen Sie, dass H^+ und H^- keine komplexen Untervektorräume des komplexen Vektorraums V sind.

(c) Berechnen Sie die reelle Dimension von H^+ und H^- und zeigen Sie, dass der reelle Vektorraum V in eine direkte Summe $V = H^+ \oplus H^-$ zerfällt.

Aufgabe 6
Bestimmen Sie unter den folgenden Matrizen $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ diejenigen, für die die Sesquilinearform $(x, y) \mapsto y^*Ax$ ein Skalarprodukt auf $V = \mathbb{C}^4$ definiert. Berechnen Sie gegebenenfalls eine Orthonormalbasis von V bezüglich dieses Skalarproduktes sowie eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = R^*R$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 13 & -6 & 7 \\ -2 & -6 & 6 & -2 \\ 1 & 7 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 4 & -4\,i & 0 & -4 \\ 4\,i & 5 & 2 & -4\,i \\ 0 & 2 & 6 & 2\,i \\ -4 & 4\,i & -2\,i & 9 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7
Im euklidischen Vektorraum $V = \mathbb{R}^5$ mit dem Standardskalarprodukt seien der Unteraum

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle$$

sowie der Vektor $a = (1\ 2\ 3\ 2\ 1)^\top$ gegeben. Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von U, die orthogonale Projektion $\Pi_U(a)$ von a auf U und den Abstand von a zu U.

Aufgabe 8
Es sei V ein reeller Vektorraum und $\sigma\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform auf V, so dass $\sigma(x, x) \geq 0$ für alle $x \in V$. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $U = \{x \in V \mid \sigma(x, y) = 0 \text{ für alle } y \in V\}$ ist ein Untervektorraum von V.

(b) Die Abbildung $\overline{\sigma}\colon V/U \times V/U \to K$, $(x + U, y + U) \mapsto \sigma(x, y)$ ist ein Skalarprodukt auf V/U.[1]

Aufgabe 9
Es sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Unterraum mit orthogonalem Komplement $W^\perp$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt genau eine lineare Abbildung $\Psi\colon V \to V$ mit $\Psi|_W = \mathrm{id}_W$ und $\Psi|_{W^\perp} = -\mathrm{id}_{W^\perp}$.

(b) Es gibt eine Orthonormalbasis B von V aus Eigenvektoren von Ψ. Geben Sie $D_{B,B}(\Psi)$ an.

(c) Ist C eine weitere Basis von V, so dass $D_{B,C}(\mathrm{id}_V)$ orthogonal ist, so ist auch $D_{C,C}(\Psi)$ orthogonal.

Aufgabe 10
Es sei V ein unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und Φ ein Endomorphismus von V mit $\langle\Phi(v), v\rangle = 0$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass $\Phi = 0$. Gilt die analoge Aussage auch für euklidische Vektorräume?

---

[1] Überprüfen Sie auch die Wohldefiniertheit von $\overline{\sigma}$!

Aufgabe 11
Es sei $V = \mathbb{R}^2$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle = y^\top \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot x.$$

Weiter sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ der Endomorphismus Φ_α von V durch

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ 2 & 4 \end{pmatrix} x$$

definiert.

(a) Bestimmen Sie alle α, für die Φ_α bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ selbstadjungiert ist.

(b) Berechnen Sie für diese Werte von α eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von Φ_α.

Aufgabe 12
Es seien V und W zwei euklidische Vektorräume mit zugehörigen Skalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ bzw. $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ und $\psi\colon V \to W$ ein Homomorphismus.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle (v, w), (v', w')\rangle_{V\times W} = \langle v, v'\rangle_V + \langle w, w'\rangle_W$ ein Skalarprodukt auf $V \times W$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\Phi\colon V \times W \to W$, $(v, w) \mapsto w + \psi(v)$ eine lineare Abbildung ist.

(c) Berechnen Sie die adjungierte Abbildung des Homomorphismus Φ.

Aufgabe 13
Es sei V ein unitärer Vektorraum und Φ ein Endomorphismus von V mit adjungierter Abbildung Φ^*. Zeigen Sie:

(a) Es gibt selbstadjungierte Endomorphismen Φ_0 und Φ_1 von V, so dass $\Phi = \Phi_0 + i\,\Phi_1$.

(b) Der Endomorphismus Φ ist genau dann normal, wenn $\Phi_0\Phi_1 = \Phi_1\Phi_0$.

(c) Ist Φ normal und $\lambda = \alpha + i\,\beta$ ein Eigenwert von Φ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist α ein Eigenwert von Φ_0 und β ein Eigenwert von Φ_1.

Aufgabe 14
Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Für $v, w \in V$ sei $\Phi_{v,w} \in \operatorname{End}(V)$ durch $\Phi_{v,w}(x) = \langle v, x\rangle w - \langle w, x\rangle v$ definiert. Zeigen Sie:

(a) Die adjungierte Abbildung von $\Phi_{v,w}$ ist $\Phi^*_{v,w} = \Phi_{w,v}$.

(b) Für alle $x \in V$ steht $\Phi_{v,w}(x)$ senkrecht auf x.

(c) $\Phi_{v,w}$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn v und w linear abhängig sind.

Aufgabe 15
Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch und positiv definit.

(a) Zeigen Sie, dass es eine hermitesche, positiv definite Matrix $W \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt, so dass $W^2 = A$.

(b) Zeigen Sie, dass es zu jedem $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine hermitesche, positiv definite Matrix W und eine unitäre Matrix U gibt, so dass $B = W \cdot U$.

Hinweis: Bestimmen Sie W aus $W^2 = B \cdot B^*$.

(c) Berechnen Sie eine solche Zerlegung für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 16
Es sei Φ eine Isometrie des $\mathbb{R}^3$ mit $\det(\Phi) = 1$ und

$$\Phi \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass Φ eine Drehung ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\Phi(x) - x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ in der Drehebene U von Φ liegt.

(c) Zeigen Sie, dass $d(x, U) = d(\Phi(x), U)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

(d) Bestimmen Sie die Drehebene, die Drehachse und den Drehwinkel von Φ.

(e) Geben Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ an bzgl. der die Darstellungsmatrix von Φ Isometrienormalform hat.

Aufgabe 17
Es seien g_1, g_2 und g_3 Geraden im $\mathbb{R}^2$ mit

$$g_i = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; a_i x + b_i y + c_i = 0 \right\}$$

für geeignete $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$. Weiter seien g_1 und g_2 nicht parallel. Zeigen Sie, dass $g_1 \cap g_2 \cap g_3 \neq \emptyset$ genau dann, wenn

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Aufgabe 18
Für $a \in \mathbb{R}$ sei

$$Q_a = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a\,x^2 + 2\,a\,x\,z - 4\,y^2 - 4\,y\,z + 2\,(a-1)\,z^2 + 4\,y + a - 1 = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie für alle $a \in \mathbb{R}$ die affine Normalform der Quadrik Q_a und für $a = 2$ ein zugehöriges affines Koordinatensystem.

Wir wünschen Ihnen schöne und erholsame Semesterferien!