Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 2 **Wintersemester 2023/24**

Übungsblatt 1 **19.04.2024**

Aufgabe 1 *(8 Punkte)*

(i) Zeigen Sie, dass jede symmetrische Matrix in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ reell diagonalisierbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass
$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$$
nicht komplex diagonalisierbar ist.

(iii) Finden Sie eine symmetrische Matrix in $\mathbb{Q}^{2\times 2}$, die nicht über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 2 *(8 Punkte)*

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}, \quad \left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \sum_{j=0}^{m} b_j X^j \right) \mapsto \sum_{k=0}^{\max\{n,m\}} a_k \overline{b}_k$$

ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}[X]$ definiert. Hierbei setzen wir $a_i = 0$, falls $i > n$ und analog auch für b_i.

Aufgabe 3

Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Weiter seien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V, welches die Norm $\|\cdot\|$, definiert als $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$, auf V induziert und $x, y \in V$.

(i) Zeigen Sie $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x-y\|^2 + \|x+y\|^2$.

(ii) Zeigen Sie $\operatorname{Re}\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right)$