Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 2 **Wintersemester 2023/24**

Musterlösung zu Übungsblatt 1 **19.04.2024**

Aufgabe 1 *(8 Punkte)*

(i) Zeigen Sie, dass jede symmetrische Matrix in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ reell diagonalisierbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$$

nicht komplex diagonalisierbar ist.

(iii) Finden Sie eine symmetrische Matrix in $\mathbb{Q}^{2\times 2}$, die nicht über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar ist.

Lösung zu Aufgabe 1

(i) Es sei $A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann ist das charakteristische Polynom von A durch $p_A(X) = (X-a)(X-d) - b^2 = X^2 - (a+d)X + (ad - b^2)$ gegeben. Dieses hat zwei verschiedene Nullstellen, falls $0 < (a+d)^2 - 4(ad-b^2) = a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4b^2 = (a-d)^2 + 4b^2$. Da $b = 0$ impliziert, dass A in Diagonalform ist, genügt es, den Fall $b \neq 0$ zu betrachten. Dann hat A zwei verschiedene Eigenwerte, da $(a-d)^2 + 4b^2 > 0$ und ist damit nach 5.6.16 im LA1 Skript Diagonalisierbar.

(ii) Die Matrix hat charakteristisches Polynom $X(X-2) + 1 = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$. Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist gegeben durch $\ker \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und hat damit Dimension 1. Damit ist die geometrische Vielfachheit strikt kleiner als die algebraische Vielfachheit.

(iii) Betrachte

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat nach obiger Rechnung die Eigenwerte

$$\frac{-5 \pm \sqrt{1^2 + 4}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

und ist somit nicht über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar.

Aufgabe 2 *(8 Punkte)*

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}, \qquad \left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \sum_{j=0}^{m} b_j X^j \right) \mapsto \sum_{k=0}^{\max\{n,m\}} a_k \overline{b}_k$$

ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}[X]$ definiert. Hierbei setzen wir $a_i = 0$, falls $i > n$ und analog auch für b_i.

Lösung zu Aufgabe 2

Wir prüfen das die Axiome für Skalarprodukte erfüllt sind:

(i) Sind $p_1(X) := \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, $p_2(X) := \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$, $p_2(X) := \sum_{k=0}^{l} c_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Für $i > n$ setzen wir $a_i = 0$, analog für b_i und c_i. Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle p_1 + \lambda p_2, p_3 \rangle &= \langle \sum_{i=0}^{\max\{m,n\}} (a_i + \lambda b_i) X^i, \sum_{j=0}^{k} c_j X^j \rangle \\
&= \sum_{i=0}^{\max\{m,n,k\}} (a_i + \lambda b_i) \overline{c}_i \\
&= \sum_{i=0}^{\max\{m,n,k\}} a_i \overline{c}_i + \lambda \sum_{j=0}^{\max\{m,n,k\}} b_i \overline{c}_i \\
&= \sum_{i=0}^{\max\{n,k\}} a_i \overline{c}_i + \lambda \sum_{j=0}^{\max\{n,k\}} b_i \overline{c}_i \\
&= \langle p_1, p_3 \rangle + \lambda \langle p_2, p_3 \rangle.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir $\max\{a, b, c\} = \max\{a, \max\{b, c\}\}$ für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ genutzt.

(ii) Es gilt

$$\langle \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \sum_{j=0}^{m} b_j X^j \rangle = \sum_{k=0}^{\max\{n,m\}} a_i \overline{b}_i = \sum_{k=0}^{\max\{n,m\}} \overline{b}_i \overline{\overline{a}}_i = \overline{\sum_{k=0}^{\max\{n,m\}} b_i \overline{a}_i} = \overline{\langle \sum_{j=0}^{m} b_j X^j, \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \rangle}.$$

(iii) Wir haben

$$\langle \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{a}_i = \sum_{i=0}^{n} |a_i|^2 > 0, \tag{0.1}$$

falls ein i mit $a_i \neq 0$ existiert. Damit ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit.

Aufgabe 3

Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Weiter seien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V, welches die Norm $\|\cdot\|$, definiert als $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$, auf V induziert und $x, y \in V$.

(i) Zeigen Sie $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x - y\|^2 + \|x + y\|^2$.

(ii) Zeigen Sie $\operatorname{Re}\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$

Lösung zu Aufgabe 3

(i) Es gilt

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2+\|x+y\|^2 &= \langle x-y,x-y\rangle+\langle x+y,x+y\rangle\\ &= \langle x,x\rangle-\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle+\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle\\ &= 2\langle x,x\rangle+2\langle y,y\rangle=2\,\|x\|^2+2\,\|y\|^2\end{aligned}$$

für alle $x,y\in V$.

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2-\|x-y\|^2 &= \langle x+y,x+y\rangle-\langle x-y,x-y\rangle\\ &= \langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle-(\langle x,x\rangle-\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle)\\ &= 2\langle x,y\rangle+2\langle y,x\rangle=2\langle x,y\rangle+2\overline{\langle x,y\rangle}=4\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle\end{aligned}$$