Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 2 **Wintersemester 2023/24**

Musterlösung zu Übungsblatt 2 **26.04.2024**

Aufgabe 1

(8 Punkte)

Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$V := \{p \in \mathbb{R}[X] : \deg(p) \leq 2\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle := \int_0^\infty p(t)q(t)e^{-t}dt.$$

Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidt Verfahren aus der Basis $\{1, X, X^2\}$ eine Orthonormalbasis von V. *(Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\int_0^\infty t^n e^{-t}dt = n!$.)*

Lösung zu Aufgabe 1

Wir haben $w_1 := 1$, $w_2 := X - \langle X, w_1\rangle / \langle w_1, w_1\rangle b_1 = X - 1! \cdot 1 = X - 1$ und

$$\begin{aligned} w_3 &:= X^2 - \frac{\langle X^2, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 - \frac{\langle X^2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 \\ &= X^2 - \frac{\langle X^2, X-1\rangle}{\langle X-1, X-1\rangle}(X-1) - \frac{\langle X^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} 1 \\ &= X^2 - 4(X-1) - 2 \\ &= X^2 - 4X + 2 \end{aligned}$$

Es gilt $\|w_1\| = 1$, $\|w_2\| = 1$ und

$$\begin{aligned} \|w_3\|^2 &= \int_0^\infty w_3(t)^2 e^{-t}dt = \int_0^\infty (t^2 - 4t + 2)^2 e^{-t}dt \\ &= \int_0^\infty (t^4 - 8t^3 + 20t^2 - 16t + 4)e^{-t}dt = 4! - 8 \cdot 3! + 20 \cdot 2! - 16 \cdot 1! + 4 \cdot 0! \\ &= 24 - 8 \cdot 6 + 20 \cdot 2 - 16 + 4 = 24 - 48 + 40 - 16 + 4 = 28 - 8 - 16 = 4. \end{aligned}$$

Somit ist $\{1, X-1, \frac{1}{2}(X^2 - 4X + 2)\}$ eine ONB von V.

Aufgabe 2

(8 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n a_j \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n a_j^2}$$

gilt.

Lösung zu Aufgabe 2

Wir wenden die Cauchy-Schwarz Ungleichung für das Standardskalarprodukt auf die Vektoren $x := (a_1, \ldots, a_n)$ und $y := (\frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}})$ an. Dann ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} a_j = \langle x, y\rangle \leq \|x\| \, \|y\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} \sqrt{\frac{n}{\sqrt{n}^2}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2}.$$

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_\infty := \sup(\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}) \qquad (x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n)$$

für $n \in \mathbb{N}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert. (Diese Norm wird *Supremumsnorm* genannt.)

b) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_\infty$ nicht von einem Skalarprodukt induziert ist, wenn $n > 1$.

Lösung zu Aufgabe 3

(i) Definitheit: Es gilt

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0 \implies |x_i| \leq 0 \, \forall i \implies x_i = 0 \, \forall i \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dreiecksungleichung: Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^T$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix}^T$. Es gilt

$$\|x + y\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i + y_i| \leq \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| + |y_i| \leq \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| + \sup_{1 \leq j \leq n} |y_j| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty .$$

Absolute Homogenität: Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^T$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\|\lambda x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |\lambda x_i| = |\lambda| \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i| = |\lambda| \, \|x\|_\infty .$$

(ii) Wir zeigen, dass (i) aus Blatt 1 Aufgabe 3 verletzt ist. Betrachten wir

$$x = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}^T, \qquad y = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}^T$$

so folgt

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 8 + 2 = 10 \neq 13 = 3^2 + 2^2 = \|x - y\|^2 + \|x + y\|^2$$

und damit kann $\|\cdot\|_\infty$ nicht von einem Skalarprodukt induziert sein.