Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 2 **Wintersemester 2023/24**

Übungsblatt 3 **03.05.2024**

Aufgabe 1 (*8 Punkte*)

(a) Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und induzierter Abstandsfunktion d. Zeigen Sie, dass für all $a, b \in V$ die Menge

$$V_{a,b} \coloneqq \{x \in V \mid d(x,a) = d(x,b)\}$$

ein affiner Unterraum ist.

(b) Finden Sie einen $\mathbb{C}$-Vektorraum W mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$, induzierter Abstandsfunktion $d_{\mathbb{C}}$ und $a, b \in W$ so, dass die Menge

$$W_{a,b} \coloneqq \{x \in W \mid d_{\mathbb{C}}(x,a) = d_{\mathbb{C}}(x,b)\}$$

kein affiner Unterraum ist.

(c) Finden Sie einen normierten $\mathbb{R}$-Vektorraum $(U, \|\cdot\|)$ und $a, b \in U$ so, dass die Menge

$$U_{a,b} \coloneqq \{x \in U \mid \|x - a\| = \|x - b\|\}$$

kein affiner Unterraum ist.

Aufgabe 2 (*8 Punkte*)

Es sei $2 \leq m \in \mathbb{N}$. Wir betrachten den $\mathbb{C}$-Vektorraum $V \coloneqq \mathbb{C}^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} = \{f \mid f : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{C}\}$ und definieren das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \sum_{x=0}^{m-1} f([x])\overline{g([x])}.$$

Für $k \in \{0, \ldots, m-1\}$ definieren wir

$$f_k([x]) \coloneqq \exp(2\pi i k x / m).$$

Zeigen Sie:

(a) Jedes f_k ist eine wohldefinierte Funktion $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

(b) $\mathscr{B} \coloneqq \{f_k \mid k \in \{0, \ldots, m-1\}\}$ ist eine Orthogonalbasis von V.