Karlsruher Institut für Technologie

**Institut für Algebra und Geometrie**
**Dr. Rafael Dahmen**
**M.Sc. Maximilian Wackenhuth**

**Lineare Algebra 2** **Wintersemester 2023/24**

**Musterlösung zu Übungsblatt 3** **03.05.2024**

## Aufgabe 1

*(8 Punkte)*

(a) Es sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und induzierter Abstandsfunktion $d$. Zeigen Sie, dass für all $a, b \in V$ die Menge

$$V_{a,b} := \{x \in V \mid d(x,a) = d(x,b)\}$$

ein affiner Unterraum ist.

(b) Finden Sie einen $\mathbb{C}$-Vektorraum $W$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$, induzierter Abstandsfunktion $d_{\mathbb{C}}$ und $a, b \in W$ so, dass die Menge

$$W_{a,b} := \{x \in W \mid d_{\mathbb{C}}(x,a) = d_{\mathbb{C}}(x,b)\}$$

kein affiner Unterraum ist.

(c) Finden Sie einen normierten $\mathbb{R}$-Vektorraum $(U, \|\cdot\|)$ und $a, b \in U$ so, dass die Menge

$$U_{a,b} := \{x \in U \mid \|x-a\| = \|x-b\|\}$$

kein affiner Unterraum ist.

## Lösung zu Aufgabe 1

(a) Methode 1: Es gilt

$$\begin{aligned}\|x-a\| = \|x-b\| &\implies \|x-a\|^2 = \|x-b\|^2 \\ &\implies \|x\|^2 - 2\langle x, a\rangle + \|a\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, b\rangle + \|b\|^2 \\ &\implies \langle x, b-a\rangle = \frac{1}{2}(\|b\|^2 - \|a\|^2).\end{aligned}$$

Damit ist $V_{a,b}$ der Lösungsraum des LGS $\langle x, b-a\rangle = \frac{1}{2}(\|b\|^2 - \|a\|^2)$ und somit ein affiner Unterraum.

Methode 2: Zunächst ist $V_{a,b} \neq \emptyset$, denn für $z := \frac{a+b}{2}$ gilt $d(a,z) = \|a-z\| = \left\|\frac{a-b}{2}\right\| = \left\|\frac{b-a}{2}\right\| = \|b-z\| = d(b,z)$. Wir behaupten nun, dass $z + \{z-a\}^\perp = V_{a,b}$. Ist $v \in \{z-a\}^\perp$, so gilt

$$\|a-(z+v)\|^2 = \|a-z+v\|^2 = \|a-z\|^2 + \|v\|^2 = \|b-z\|^2 + \|v\|^2 = \|b-(z+v)\|^2,$$

da $a - z = \frac{a-b}{2} = -(b-z)$.

Ist $y \in V_{a,b}$, so ist

$$\begin{aligned}\langle y-z, a-z\rangle &= \frac{1}{4}(\|y-z-(z-a)\|^2 + \|y-z+(z-a)\|^2)\\ &= \frac{1}{4}(\|y-z+(z-b)\|^2 + \|y-a\|^2) = \frac{1}{4}(\|y-b\|^2 - \|y-a\|^2)\\ &= 0.\end{aligned}$$

(b) Wir betrachten den $\mathbb{C}$-Vektorraum $W := \mathbb{C}$ mit dem Standardskalarprodukt und $a := 1, b := 2$. Dann ist

$$\begin{aligned}x+iy \in W_{1,2} &\iff \|x+yi-1\| = \|x+yi-2\|\\ &\iff (x-1)^2 + y^2 = (x-2)^2 + y^2\\ &\iff (x-1)^2 = (x-2)^2\\ &\iff x^2 - 2x + 1 = x^2 - 4x + 4\\ &\iff -2x + 3 = 0\\ &\iff x = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Damit ist $W_{a,b} = \{\frac{3}{2} + iy \mid y \in \mathbb{R}\}$ und somit kein affiner Unterraum.

(c) Wir betrachten $U := \mathbb{R}^2$ mit der Norm $\|\cdot\|_1$ und den Vektoren $a := e_1, b := e_2$. Dann gilt $\lambda(e_1 + e_2) \in U_{a,b}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und somit $\mathrm{LH}\,(e_1 + e_2) \subset U_{a,b}$. Nun gilt aber auch

$$d(e_1, (0,-1)^T) = 2 = d(e_2, (0,-1)^T)$$

und somit ist $(0,-1)^T \in U_{a,b}$. Wäre $U_{a,b}$ ein affiner Unterraum, so müsste $U_{a,b}$ folglich zweidimensional sein (und ein Untervektorraum, da $0 \in U_{a,b}$). Da aber nicht jedes Element von $\mathbb{R}^2$ in $U_{a,b}$ liegt (beispielsweise ist $e_1 \notin U_{a,b}$), ist somit $U_{a,b}$ kein affiner Unterraum.

## Aufgabe 2 *(8 Punkte)*

Es sei $2 \leq m \in \mathbb{N}$. Wir betrachten den $\mathbb{C}$-Vektorraum $V := \mathbb{C}^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} = \{f \mid f : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{C}\}$ und definieren das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \sum_{x=0}^{m-1} f([x])\overline{g([x])}.$$

Für $k \in \{0, \dots, m-1\}$ definieren wir

$$f_k([x]) := \exp(2\pi i k x/m).$$

Zeigen Sie:

(a) Jedes $f_k$ ist eine wohldefinierte Funktion $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$.

(b) $\mathscr{B} := \{f_k \mid k \in \{0, \dots, m-1\}\}$ ist eine Orthogonalbasis von $V$.

**Lösung zu Aufgabe 2**

(a) Sind $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $[x] = [y]$, so gibt es $l \in \mathbb{Z}$ mit $x = y + lm$. Dann ist $\exp(2\pi ikx/m) = \exp(2\pi ik(y + lm)/m) = \exp(2\pi iky/m)\exp(2\pi ikl) = \exp(2\pi iky/m)$ und damit ist $f_k$ wohldefiniert.

(b) Wir haben

$$
\begin{aligned}
\langle f_{k_1}, f_{k_2}\rangle &= \sum_{x=0}^{m-1} \exp(2\pi i(k_1 - k_2)x/m) \\
&= \sum_{x=0}^{m-1} \exp(2\pi i(k_1 - k_2)/m)^x \\
&= \frac{\exp(2\pi i(k_1 - k_2)/m)^m - 1}{\exp(2\pi i(k_1 - k_2)/m) - 1} \\
&= \frac{\exp(2\pi i(k_1 - k_2)) - 1}{\exp(2\pi i(k_1 - k_2)/m) - 1} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Damit ist $\mathscr{B} = \{f_k \mid k \in \{0, \ldots, m-1\}\}$ ein Orthogonalsystem. Die Dimension von $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}$ ist $m$, da die Kardinalität von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ gerade $m$ ist. Damit ist $\mathscr{B}$ eine Menge von linear unabhägigen Vektoren (da Orthogonalsystem) deren Kardinalität gleich der Dimension des Vektorraums ist und somit eine Basis.