Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 2 **Wintersemester 2023/24**

Übungsblatt 3 **03.05.2024**

Aufgabe 1 *(8 Punkte)*

a) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\max(|x+y|, |y-x|) = |x| + |y|.$$

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty), \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix}$$

eine surjektive Isometrie ist.

Aufgabe 2 *(8 Punkte)*

Es seien $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $w, v \in V$, $\phi, \psi : V \to V$ lineare Isometrien.

a) Zeigen Sie, dass

$$\psi \circ \tau_v = \tau_{\psi(v)} \circ \psi,$$

b) Zeigen Sie, dass

$$(\tau_v \circ \psi) \circ (\tau_w \circ \phi) = \tau_{v+\psi(w)} \circ (\psi \circ \phi),$$

c) Nun sei ψ surjektiv. Zeigen Sie

$$(\tau_v \circ \psi)^{-1} = \tau_{-\psi^{-1}(v)} \circ \psi^{-1}.$$

Aufgabe 3

Es sei $V = \mathbb{R}^4$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt. Wir setzen

$$U = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von $U^\perp$.

b) Es sei $\pi_U : V \to V$ die Orthogonalprojektion auf U. Bestimmen Sie $M_{\mathsf{E},\mathsf{E}}(\pi_U)$.