Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 2 **Wintersemester 2023/24**

Musterlösung zu Übungsblatt 3 **03.05.2024**

Aufgabe 1

(8 Punkte)

a) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\max(|x+y|\,, |y-x|) = |x| + |y|\,.$$

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty), \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix}$$

eine surjektive Isometrie ist.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Haben x, y das selbe Vorzeichen, so ist $\max(|x+y|\,, |y-x|) = |x+y| = |x| + |y|$. Haben x, y nicht das selbe Vorzeichen, so haben $-x, y$ das selbe Vorzeichen.

b) Die Abbildung ist gegeben durch die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da diese Determinante 2 hat, ist die Abbildung invertierbar und somit surjektiv. Wir haben

$$\left\| \Phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \right\|_\infty = \max(|x+y|\,, |y-x|) = |x| + |y| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_1$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und damit ist Φ eine Isometrie.

Aufgabe 2

(8 Punkte)

Es seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $w, v \in V$, $\phi, \psi : V \to V$ lineare Isometrien.

a) Zeigen Sie, dass

$$\psi \circ \tau_v = \tau_{\psi(v)} \circ \psi,$$

b) Zeigen Sie, dass

$$(\tau_v \circ \psi) \circ (\tau_w \circ \phi) = \tau_{v+\psi(w)} \circ (\psi \circ \phi),$$

c) Nun sei ψ surjektiv. Zeigen Sie

$$(\tau_v \circ \psi)^{-1} = \tau_{-\psi^{-1}(v)} \circ \psi^{-1}.$$

Lösung zu Aufgabe 2

a) Es gilt $\psi \circ \tau_v(x) = \psi(x+v) = \psi(x) + \psi(v) = \tau_{\psi(v)} \circ \psi(x)$ für alle $x \in V$.

b) Es gilt $\tau_v(\psi(\tau_w(\phi(x)))) = \tau_{v+\psi(w)}(\psi(\phi(x)))$ für alle $x \in V$.

c) Es gilt $\tau_{-\psi^{-1}(v)} \circ \psi^{-1} \circ \tau_v \circ \psi = \tau_{-\psi^{-1}(v)+\psi^{-1}(v)} \circ \psi^{-1} \circ \psi = \mathrm{id} \circ \mathrm{id}$ und $\tau_v \circ \psi \circ \tau_{-\psi^{-1}(v)} \circ \psi^{-1} = \tau_{v-\psi(\psi^{-1}(v))} \circ \psi \circ \psi^{-1} = \tau_0 \circ \mathrm{id} = \mathrm{id}$.

Aufgabe 3

Es sei $V = \mathbb{R}^4$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt. Wir setzen

$$U = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von $U^\perp$.

b) Es sei $\pi_U : V \to V$ die Orthogonalprojektion auf U. Bestimmen Sie $M_{\mathsf{E},\mathsf{E}}(\pi_U)$.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Wir wenden Gram-Schmidt auf die Basis

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=:b_2}, e_3, e_4 \right)$$

von $\mathbb{R}^4$ an. $w_1 := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$.

$$w_2 := b_2 - \frac{\langle b_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = b_2 - \frac{2}{2} w_1 = b_2 - w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T$$

$$w_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle e_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = e_3 - 0 w_1 - 0 w_2 = e_3$$

$$w_4 = e_4 - \frac{\langle e_4, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle e_4, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \frac{\langle e_4, w_3 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} w_3 = e_4 - 0 w_1 - \frac{2}{6} w_2 - 0 w_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^T$$

Dann ist $u^\perp = \mathrm{LH}\,(w_3, w_4)$, da aus den Eigenschaften des Gram-Schmidt-Alorithmus folgt, dass $\mathrm{LH}\,(b_1, b_2) = \mathrm{LH}\,(w_1, w_2)$.

b) Wir haben $\pi_U(x) := \frac{\langle x, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 + \frac{\langle x, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$. Es gilt

$$\pi_U(e_1) = \frac{1}{2} w_1 + \frac{1}{6} w_2 = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}^T,$$

$$\pi_U(e_2) = \frac{-1}{2} w_1 + \frac{1}{6} w_2 = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}^T,$$

$$\pi_U(e_3) = \frac{0}{2}w_1 + \frac{0}{6}w_2 = 0,$$

$$\pi_U(e_4) = \frac{0}{2}w_1 + \frac{2}{6}w_2 = \begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & 0 & 2/3\end{pmatrix}^T.$$

Insgesamt gilt

$$M_{\mathsf{E},\mathsf{E}}(\pi_U) = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$