Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 2 **Wintersemester 2023/24**

Übungsblatt 5 **16.05.2024**

Aufgabe 1 (*Winkeltreue Abbildungen*) (*8 Punkte*)

Es seien V und W euklidische Vektorräume, mit $\dim(V) > 0$, und $\Phi : V \to W$ eine injektive lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Für alle $x, y \in V \setminus \{0\}$ gilt $\sphericalangle(x, y) = \sphericalangle(\Phi(x), \Phi(y))$.

(ii) Für alle $x, y \in V$ gilt $x \perp y \implies \Phi(x) \perp \Phi(y)$.

(iii) Für alle $x, y \in V$ gilt $\|x\| = \|y\| \implies \|\Phi(x)\| = \|\Phi(y)\|$.

(iv) Es gibt eine reelle Zahl $r > 0$ so, dass für alle $x \in V$ gilt $\|\Phi(x)\| = r\,\|x\|$.

(v) Es gibt eine reelle Zahl $r > 0$ und eine lineare Isometrie $\Psi : V \to W$ so, dass $\Phi = r\Psi$.

(Hinweis: Was ist das Skalarprodukt von $x + y$ und $x - y$?)

Aufgabe 2 (*Generelle Orthogonale Gruppen*) (*8 Punkte*)

Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum, wobei $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass $O(V, \langle\cdot,\cdot\rangle) \coloneqq \{\Phi : V \to V \mid \Phi \text{ lineare Isometrie}\}$ mit der Verknüpfung $\circ$ eine Gruppe ist.

b) Zeigen Sie, dass $O(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und $O(n)$ als Gruppen isomorph sind. *(Satz 2.1.10 könnte helfen.)*

Aufgabe 3

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Finden Sie eine Isometrie $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, wobei wir $\mathbb{C}^n$ mit dem Standardskalarprodukt ausstatten, die $\Phi(0) = 0$ erfüllt und nicht in $U(n)$ liegt.