Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 2 **Wintersemester 2023/24**

Musterlösung zu Übungsblatt 5 **16.05.2024**

Aufgabe 1 (*Winkeltreue Abbildungen*) (*8 Punkte*)

Es seien V und W euklidische Vektorräume, mit $\dim(V) > 0$, und $\Phi : V \to W$ eine injektive lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Für alle $x, y \in V \setminus \{0\}$ gilt $\sphericalangle(x, y) = \sphericalangle(\Phi(x), \Phi(y))$.

(ii) Für alle $x, y \in V$ gilt $x \perp y \implies \Phi(x) \perp \Phi(y)$.

(iii) Für alle $x, y \in V$ gilt $\|x\| = \|y\| \implies \|\Phi(x)\| = \|\Phi(y)\|$.

(iv) Es gibt eine reelle Zahl $r > 0$ so, dass für alle $x \in V$ gilt $\|\Phi(x)\| = r\,\|x\|$.

(v) Es gibt eine reelle Zahl $r > 0$ und eine lineare Isometrie $\Psi : V \to W$ so, dass $\Phi = r\Psi$.

(Hinweis: Was ist das Skalarprodukt von $x + y$ und $x - y$?)

Lösung zu Aufgabe 1

(i) $\implies$ (ii): Klar.
(ii) $\implies$ (iii): Es gilt $\langle x + y, x - y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$. Ist $\|x\| = \|y\|$, so folgt $\langle x + y, x - y\rangle = 0$ und damit $0 = \langle \Phi(x + y), \Phi(x - y)\rangle = \|\Phi(x)\|^2 - \|\Phi(y)\|^2$. Somit ist $\|\Phi(x)\| = \|\Phi(y)\|$.
(iii) $\implies$ (iv): Sei $x \in V \setminus \{0\}$. Setze $r = \frac{\|\Phi(x)\|}{\|x\|}$. Ist $y \in V \setminus \{0\}$, so gibt es $\lambda > 0$ mit $\|\lambda y\| = \|x\|$. Dann gilt nach (ii)

$$\|\Phi(x)\| = \|\Phi(\lambda y)\|$$

und somit

$$\|\Phi(y)\| = \lambda^{-1}\,\|\Phi(x)\| = \lambda^{-1} r\,\|x\| = \lambda^{-1} r\,\|\lambda y\| = r\,\|y\|\,.$$

(iv) $\implies$ (v): Es sei $r > 0$ das r aus (iii). Setze $\Psi(x) := \frac{1}{r}\Phi(x)$. Dann ist Ψ nach (iii) eine Isometrie.
(v) $\implies$ (i): Sind $x, y \in V$, so gilt $\frac{\langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle}{\|\Phi(x)\|\|\Phi(y)\|} = \frac{r^{-2}\langle \Psi(x), \Psi(y)\rangle}{r^{-2}\|\Psi(x)\|\|\Psi(y)\|} = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}$

Aufgabe 2 (*Generelle Orthogonale Gruppen*)

Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum, wobei $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass $O(V, \langle\cdot,\cdot\rangle) := \{\Phi : V \to V \mid \Phi \text{ lineare Isometrie}\}$ mit der Verknüpfung $\circ$ eine Gruppe ist.

b) Zeigen Sie, dass $O(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und $O(n)$ als Gruppen isomorph sind. *(Satz 2.1.10 könnte helfen.)*

Lösung zu Aufgabe 2

a) Seien $\Phi, \Psi \in \mathrm{O}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Wegen

$$\begin{aligned}\langle (\Phi \circ \Psi)(v), (\Phi \circ \Psi)(w) \rangle &= \langle \Phi(\Psi(v)), \Phi(\Psi(w)) \rangle \\ &= \langle \Psi(v), \Psi(w) \rangle \\ &= \langle v, w \rangle,\end{aligned}$$

$$\langle \mathrm{id}_V(v), \mathrm{id}_V(w) \rangle = \langle v, w \rangle,$$

$$\begin{aligned}\langle \Phi^{-1}(v), \Phi^{-1}(w) \rangle &= \langle \Phi(\Phi^{-1}(v)), \Phi(\Phi^{-1}(v)) \rangle \\ &= \langle (\Phi \circ \Phi^{-1})(v), (\Phi \circ \Phi^{-1})(v) \rangle \\ &= \langle \mathrm{id}_V(v), \mathrm{id}_V(w) \rangle \\ &= \langle v, w \rangle\end{aligned}$$

gilt $\Phi \circ \Psi, \mathrm{id}_V, \Phi^{-1} \in \mathrm{O}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, d.h. $\mathrm{O}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist eine Untergruppe von $\mathscr{S}(V)$. □

b) Nach Satz 2.1.10 ist $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ isometrisch isomorph zu $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt B, wobei $n = \dim(V)$. Sei $\Psi : V \to \mathbb{R}^n$ ein isometrischer Isomorphismus. Wir betrachten die Abbildungen

$$\begin{aligned}\alpha : \mathrm{O}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \to \mathrm{O}(n),\ \varphi \mapsto \Psi \circ \varphi \circ \Psi^{-1}, \\ \beta : \mathrm{O}(n) \to \mathrm{O}(V, \langle \cdot, \cdot, \rangle),\ \phi \mapsto \Psi^{-1} \circ \phi \circ \Psi.\end{aligned}$$

Diese sind wohldefiniert, denn für $\varphi \in \mathrm{O}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, gilt

$$\begin{aligned}B(\alpha(\varphi)(x), \alpha(\varphi)(y)) &= B(\Psi(\varphi(\Psi^{-1}(x))), \Psi(\varphi(\Psi^{-1}(y)))) \\ &= \langle \varphi(\Psi^{-1}(x)), \varphi(\Psi^{-1}(y)) \rangle \\ &= \langle \Psi^{-1}(x), \Psi^{-1}(y) \rangle \\ &= B(x, y),\end{aligned}$$

d.h. $\alpha(\varphi) \in \mathrm{O}(n)$, und für $\phi \in \mathrm{O}(n)$, $v, w \in V$, gilt

$$\begin{aligned}\langle \beta(\phi)(v), \beta(\phi)(w) \rangle &= \langle \Psi^{-1}(\phi(\Psi(v))), \Psi^{-1}(\phi(\Psi(w))) \rangle \\ &= B(\phi(\Psi(v)), \phi(\Psi(w))) \\ &= B(\Psi(v), \Psi(w)) \\ &= \langle v, w \rangle,\end{aligned}$$

d.h. $\beta(\phi) \in \mathrm{O}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Diese Abbildungen sind zueinander invers, denn für $\phi \in \mathrm{O}(n)$, $\varphi \in \mathrm{O}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt

$$\begin{aligned}\alpha(\beta(\phi)) &= \Psi \circ \beta(\phi) \circ \Psi^{-1} \\ &= \Psi \circ \Psi^{-1} \circ \phi \circ \Psi \circ \Psi^{-1} \\ &= \phi\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\beta(\alpha(\varphi)) &= \Psi^{-1} \circ \alpha(\varphi) \circ \Psi \\ &= \Psi^{-1} \circ \Psi \circ \varphi \circ \Psi^{-1} \circ \Psi \\ &= \varphi.\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}\alpha(\varphi \circ \psi) &= \Psi \circ \varphi \circ \psi \circ \Psi^{-1} \\ &= \Psi \circ \varphi \circ \Psi^{-1} \circ \Psi \circ \psi \circ \Psi^{-1} \\ &= \alpha(\varphi) \circ \alpha(\psi)\end{aligned}$$

ist α (und folglich auch β) ein Gruppenisomorphismus. Also sind $\mathrm{O}(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und $\mathrm{O}(n)$ zueinander isomorph. $\square$

Aufgabe 3

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Finden Sie eine Isometrie $\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, wobei wir $\mathbb{C}^n$ mit dem Standardskalarprodukt ausstatten, die $\Phi(0) = 0$ erfüllt und nicht in $U(n)$ liegt.

Lösung zu Aufgabe 3

Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \overline{z}_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\left\| \Phi\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right) \right\| = \sqrt{|\overline{z}_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2} = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2} = \left\| \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right\|$$

für alle $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Es gilt $\Phi(ie_1) = -ie_1 \neq ie_1 = i\Phi(e_1)$. Damit ist die Abbildung nicht $\mathbb{C}$-linear und kann also nicht in $U(n)$ liegen. $\Phi(0) = 0$ ist direkt ersichtlich.