Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 2 **Wintersemester 2023/24**

Übungsblatt 7 **07.06.2024**

Aufgabe 1 (*Lemma 2.6.12*) (*8 Punkte*)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Wir setzen

$$\overline{v} \coloneqq \begin{pmatrix} \overline{z}_1 \\ \vdots \\ \overline{z}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n, \qquad \mathrm{Re}(v) \coloneqq \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z_1) \\ \vdots \\ \mathrm{Re}(z_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}(v) \coloneqq \begin{pmatrix} \mathrm{Im}(z_1) \\ \vdots \\ \mathrm{Im}(z_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie:

a) $\mathrm{LH}_{\mathbb{C}}(v, \overline{v}) = \mathrm{LH}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Re}(v), \mathrm{Im}(v))$.

b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $\mathrm{Im}(v) \perp \mathrm{Re}(v)$ in $\mathbb{R}^n$ mit Standardskalarprodukt und $\|\mathrm{Re}(v)\| = \|\mathrm{Im}(v)\|$.

(ii) $v \perp \overline{v}$ in $\mathbb{C}^n$ mit dem Standardskalarprodukt.

Aufgabe 2 (*8 Punkte*)

Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \sum_{j=0}^{m} b_j X^j \rangle \coloneqq \sum_{k=0}^{\min\{n,m\}} a_k b_k,$$

wobei $\sum_{i=0}^{n} a_i X^j, \sum_{j=0}^{m} b_j X^j \in \mathbb{R}[X]$ (Dieses Skalarprodukt kennen Sie aus Aufgabe 2 Blatt 1). Wir definieren die Abbildungen

$$R : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i X^{i+1}$$

und

$$L : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ a_0 + a_1 X + \ldots a_n X^n \mapsto a_1 + a_2 X + \ldots a_n X^{n-1}.$$

Zeigen Sie, dass R und L adjungiert sind.

Aufgabe 3

Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt sowie $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Zeigen Sie, dass aus

$$\varphi^* = \varphi = \varphi^2$$

folgt, dass ein Untervektorraum $U \leq V$ so existiert, dass $\varphi = \pi_U$.