Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 2 **Wintersemester 2023/24**

Übungsblatt 8 **14.06.2024**

Aufgabe 1 *(8 Punkte)*

Es sei $A \in O(3)$ mit charakteristischem Polynom p_A.

a) Zeigen Sie, dass A genau dann eine Drehung ist, falls es ein $\mu \in [-1, 3]$ mit

$$p_A(X) = X^3 - \mu X^2 + \mu X - 1$$

gibt.

b) Finden Sie ein $\mu \in [-1, 3]$ und eine Matrix $B \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ mit charakteristischem Polynom

$$X^3 - \mu X^2 + \mu X - 1$$

die nicht ähnlich zu einer Drehung ist.

c) Zeigen Sie, dass A genau dann eine Hyperebenenspiegelung (eine Abbildung s_v wie in Tutorium 4 Aufgabe 2a)) ist, wenn

$$p_A(X) = X^3 - X^2 - X + 1.$$

Aufgabe 2 *(8 Punkte)*

Wir betrachten $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}^{\perp}.$$

a) Zeigen Sie A ist in $O(4)$.

b) Zeigen Sie, dass V invariant unter A ist, d.h. für alle $v \in V$ ist auch $Av \in V$.

c) Es sei $\varphi : V \to V,\ x \mapsto Ax$. Finden Sie eine Orthonormalbasis B von V, sodass $M_{\mathsf{B},\mathsf{B}}(\varphi)$ in Isometrienormalform ist.