Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 2 **Wintersemester 2023/24**

Musterlösung zu Übungsblatt 8 **14.06.2024**

Aufgabe 1

(8 Punkte)

Es sei $A \in O(3)$ mit charakteristischem Polynom p_A.

a) Zeigen Sie, dass A genau dann eine Drehung (damit meinen wir hier ein Element in $SO(3)$) ist, falls es ein $\mu \in [-1, 3]$ mit

$$p_A(X) = X^3 - \mu X^2 + \mu X - 1$$

gibt.

b) Finden Sie ein $\mu \in [-1, 3]$ und eine Matrix $B \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ mit charakteristischem Polynom

$$X^3 - \mu X^2 + \mu X - 1$$

die nicht ähnlich zu einer Drehung ist.

c) Zeigen Sie, dass A genau dann eine Hyperebenenspiegelung (eine Abbildung s_v wie in Tutorium 4 Aufgabe 2a)) ist, wenn

$$p_A(X) = X^3 - X^2 - X + 1.$$

Lösung zu Aufgabe 1

a) Ist A eine Drehung, dann ist die Isometrienormalform von A von der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in [0, \pi]$. Also ist A ähnlich zu obiger Matrix. Da ähnliche Matrizen gleiche charakteristische Polynome haben, ist das charakteristische Polynom von A durch

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 0 & X - \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & X - \cos(\alpha) \end{pmatrix} &= (X-1)((X - \cos(\alpha))^2 + \sin(\alpha)^2) \\ &= (X-1)(X^2 - 2\cos(\alpha)X + 1) \\ &= X^3 - (2\cos(\alpha) + 1)X^2 + (2\cos(\alpha) + 1)X - 1 \end{aligned}$$

gegeben.

Ist $A \in O(3)$ mit charakteristischem Polynom $X^3 - \lambda X^2 + \lambda X + 1$, so ist $\det(A) = 1$ und somit $A \in SO(3)$. Damit ist die Isometrienormalform von der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

In diesen Fällen sind die charakteristischen Polynome von der Form

$$X^3 - 3X^2 + 3X + 1, \qquad X^3 + X^2 - X - 1, \qquad X^3 - (2\cos(\alpha)+1)X^2 + (2\cos(\alpha)+1)X - 1.$$

b) Wir betrachten die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese hat das korrekte charakteristische Polynom für $\mu = 3$. Die Matrix hat den Eigenwert 1 mit Vielfachheit 3, d.h. sie müsste zu einer orthogonalen Matrix mit Isometrienormalform $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ ähnlich sein und damit selbst ähnlich zu Identität sein. Dies ist allerdings nicht möglich, da jede Matrix, die ähnlich zu Identität ist, bereits die Identität ist.

c) Ist A eine Hyperebenespiegelung, dann hat A die Isometrienormalform

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

(denn $E_1(s_v) = v^\perp$ und $E_{-1}(s_v) = \mathrm{LH}\,(v)$) und die Behauptung folgt. Ist $A \in O(3)$ mit charakteristischem Polynom $X^3 + X^2 - X + 1$, so ist $\det A = -1$ und damit ist die Isometrienormalform von A von der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Somit sind die möglichen charakteristischen Polynome durch

$$X^3 - X^2 - X + 1, \qquad X^3 + 3X^2 + 3X + 1, \qquad X^3 + (1 - 2\cos(\alpha))X^2 + (1 - 2\cos(\alpha))X + 1$$

gegeben und wir sehen, dass die Isometrienormalform von A von der Form $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ sein muss. Ist nun v der Eigenvektor zum Eigenwert -1 von A, so sehen wir, dass s_v die von A induzierte Abbildung sein muss, da $E_1(A) = v^\perp$ und $E_{-1}(A) = \mathrm{LH}\,(v)$ und ebenso $E_1(s_v) = v^\perp$ und $E_{-1}(s_v) = \mathrm{LH}\,(v)$, d.h. die von A induzierte Abbildung φ_A und s_v stimmen auf einem Erzeugendemsystem überein und sind somit gleich.

Aufgabe 2 *(8 Punkte)*

Wir betrachten $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}^\perp.$$

a) Zeigen Sie A ist in $O(4)$.

b) Zeigen Sie, dass V invariant unter A ist, d.h. für alle $v \in V$ ist auch $Av \in V$.

c) Es sei $\varphi : V \to V,\ x \mapsto Ax$. Finden Sie eine Orthonormalbasis B von V, sodass $M_{\mathsf{B},\mathsf{B}}(\varphi)$ in Isometrienormalform ist.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Die Spalten von A bilden eine ONB bezüglich dem Standardskalarprodukt. Also ist $A \in O(4)$.

b) Nach Beweis des Satzes über die reelle Isometrienormalform zerfällt $\mathbb{R}^4$ als $\mathbb{R}^4 = E_1(A) \oplus E_{-1} \oplus R$, mit $E_1(A), E_{-1}(A)$ und R paarweise orthogonal und A-invariant. Damit ist V von der Form $E_{-1}(A) \oplus R \oplus (V \cap E_1(A)) \subset V$ und da $\dim V \cap E_1(A) = \dim E_1(A) - 1$ (denn ist $V \cap E_1(A) \neq \{0\}$, so ist $V \cap E_1(A) = \ker(\phi)$, mit $\phi : E_1(A) \to \mathbb{R}, x \mapsto \langle x, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \rangle$, und die Behauptung folgt aus dem Rangsatz und ist $V \cap E_1(A) = \{0\}$, so ist nichts zu zeigen), folgt $E_{-1}(A) \oplus R \oplus (E_1(A) \cap V) = V$ und da jeder Unterraum eines Eigenraums A-invariant ist, ist V die direkte Summe von A-invarianten Unterräumen. Damit folgt die Behauptung.

c) Wir betrachten die Basis

$$\mathsf{C} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Bezüglich dieser ist

$$M_{\mathsf{C},\mathsf{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} p_\varphi(X) &= \det \begin{pmatrix} X & 0 & 1 \\ -1 & X & 1 \\ 0 & -1 & X+1 \end{pmatrix} = X \det \begin{pmatrix} X & 1 \\ -1 & X+1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -1 & X \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= X(X(X+1)+1)+1 = X^3 + X^2 + X + 1 = (X+1)(X-i)(X+i). \end{aligned}$$

Damit hat die Isometrienormalform von φ den Eigenwert -1 und ein Drehkästchen zum Winkel $\frac{\pi}{2}$. Es gilt

$$\ker(M_{\mathsf{C},\mathsf{C}}(\varphi) + \mathbb{1}_3) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Damit ist $E_{-1}(\varphi) = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ und wir können nun die Drehebene durch

$$\mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{\perp} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

bestimmen. Damit gilt für

$$\mathsf{B} = \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right),$$

dass $M_{\mathsf{B},\mathsf{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ 0 & \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{pmatrix}.$