Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 2 **Sommersemester 2024**

Übungsblatt 9 **21.06.2024**

Aufgabe 1

(8 Punkte)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für $v \in V$ sei $\varphi_v : \mathbb{K} \to V, \lambda \mapsto \lambda v$.

a) Zeigen Sie: Für $v \in V$ ist φ_v^* durch

$$V^* \to \mathbb{K}^*,\ \sigma \mapsto \sigma(v)\mathrm{id}_{\mathbb{K}}$$

gegeben.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Psi : \mathrm{Hom}(\mathbb{K}, V) \to V,\ \varphi \mapsto \varphi(1)$$

ein Isomorphismus ist und geben Sie die Inverse an.

Aufgabe 2

(8 Punkte)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ und $\mathsf{E} := \{e_1, \ldots, e_n\}$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$. Weiter sei

$$b_i := \sum_{j=1}^{i} e_j$$

für $i \leq n$. Weiter seien e_i^*, $i \in 1, \ldots, n$ die Koordinatenfunktionen bezüglich der Basis E und b_i^* die Koordinatenfunktionen bezüglich der Basis $\mathsf{B} := (b_1, \ldots, b_n)$.

a) Zeigen Sie, dass $e_1^* \neq b_1^*$.

b) Stellen Sie für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Abbildung e_i^* als Linearkombination der Elemente der dualen Basis $\mathsf{B}^* = (b_1^*, \ldots, b_n^*)$ dar.