

Aufgabe 1

(8 Punkte)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Für $v \in V$ sei $\varphi_v : \mathbb{K} \rightarrow V, \lambda \mapsto \lambda v$.

a) Zeigen Sie: Für $v \in V$ ist φ_v^* durch

$$V^* \rightarrow \mathbb{K}^*, \sigma \mapsto \sigma(v)\text{id}_{\mathbb{K}}$$

gegeben.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Psi : \text{Hom}(\mathbb{K}, V) \rightarrow V, \varphi \mapsto \varphi(1)$$

ein Isomorphismus ist und geben Sie die Inverse an.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Es seien $\sigma \in V^*$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\varphi_v^*(\sigma)(\lambda) = \sigma(\varphi_v(\lambda)) = \sigma(\lambda v) = \lambda \sigma(v) = \sigma(v)\text{id}_{\mathbb{K}}(\lambda).$$

Somit folgt $\varphi_v^*(\sigma) = \sigma(v)\text{id}_{\mathbb{K}}$

b) Wir betrachten $\Phi : V \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{K}, V), v \mapsto \varphi_v$. Diese Abbildung ist linear, denn für $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt $\Phi(\lambda v + w)(t) = \varphi_{\lambda v + w}(t) = t(\lambda v + w) = \lambda tv + tw = \lambda \varphi_v(t) + \varphi_w(t) = \lambda \Phi(v)(t) + \Phi(w)(t)$ für alle $t \in \mathbb{K}$ und damit $\Phi(\lambda v + w) = \lambda \Phi(v) + \Phi(w)$. Somit ist Φ linear. Es gilt

$$\Psi(\Phi(v)) = \varphi_v(1) = v$$

und ist $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{K}, V)$, so gilt $\varphi(\lambda) = \lambda \varphi(1) = \varphi_{\varphi(1)}(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, d.h. $\varphi = \varphi_{\varphi(1)}$ und damit ist

$$\Phi(\Psi(\varphi)) = \varphi_{\varphi(1)} = \varphi.$$

Also ist Φ die Inverse von Ψ und Ψ ein Isomorphismus.

Aufgabe 2

(8 Punkte)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ und $E := \{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$. Weiter sei

$$b_i := \sum_{j=1}^i e_j$$

für $i \leq n$. Weiter seien $e_i^*, i \in 1, \dots, n$ die Koordinatenfunktionen bezüglich der Basis E und b_i^* die Koordinatenfunktionen bezüglich der Basis $B := (b_1, \dots, b_n)$.

- a) Zeigen Sie, dass $e_1^* \neq b_1^*$.
- b) Stellen Sie für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ die Abbildung e_i^* als Linearkombination der Elemente der dualen Basis $B^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$ dar.

Lösung zu Aufgabe 2

- a) Es gilt

$$e_1^*(b_2) = e_1^*(e_1 + e_2) = 1$$

und

$$b_1^*(b_2) = 0.$$

- b) Es gilt

$$e_i^*(b_j) = e_i^*\left(\sum_{k=1}^j e_k\right) = \begin{cases} 1, & i \leq j \\ 0, & i > j \end{cases}.$$

Ist $\varphi \in (\mathbb{K}^n)^*$, so gilt

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{k=1}^n b_k^*(x)b_k\right) = \sum_{k=1}^n \varphi(b_k)b_k^*(x)$$

und damit

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \varphi(b_k)b_k^*.$$

Also ist

$$e_i^* = \sum_{k=i}^n b_k^*.$$