Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 2 **Sommersemester 2024**

Musterlösung zu Übungsblatt 10 **28.06.2024**

Aufgabe 1

a) Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\}$ und V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\beta : V \times V \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform. Zeigen Sie, dass für je zwei Basen B, C von V gilt, dass

$$\det \mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta) = \det \mathrm{FM}_{\mathsf{C}}(\beta)$$

b) Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper in dem ein $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ existiert, welches $a^2 \neq 1$ erfüllt. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auf $\mathbb{K}^n$ eine Bilinearform $\beta : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ und Basen B und C von $\mathbb{K}^n$ existieren, sodass

$$\det \mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta) \neq \det \mathrm{FM}_{\mathsf{C}}(\beta)$$

gilt.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Es gilt $\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta) = M_{\mathsf{C},\mathsf{B}}(\mathrm{id})^T \mathrm{FM}_{\mathsf{C}}(\beta) M_{\mathsf{C},\mathsf{B}}(\mathrm{id})$. Damit ist $\det \mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta) = (\det M_{\mathsf{CB}}(\mathrm{id}))^2 \det \mathrm{FM}_{\mathsf{C}}(\beta)$. Da für jedes $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ gilt, dass $a^2 = 1$, folgt

$$\det \mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta) = \det \mathrm{FM}_{\mathsf{C}}(\beta)$$

b) Wir betrachten die Bilinearform β mit Fundamentalmatrix

$$\begin{pmatrix} a^2 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich einer Basis $(b_1, \dots, b_n)$. Dann ist die Fundamentalmatrix von β bezüglich der Basis $(\frac{1}{a} b_1, b_2, \dots, b_n)$ durch

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a^2 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

geben. Damit sind

$$\begin{pmatrix} a^2 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Fundamentalmatrizen der selben Bilinearform zu verschiedenen Basen. Offenbar haben Sie unterschiedliche Determinanten.

Aufgabe 2 *(8 Punkte)*

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Wir betrachten die Bilinearform

$$\beta : \mathbb{K}^{2\times 2} \times \mathbb{K}^{2\times 2} \to \mathbb{K},\ (A, B) \mapsto \operatorname{Spur}(AB).$$

Bestimmen Sie die Fundamentalmatrix von β bezüglich der Basis

$$\mathsf{B} := (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}).$$

Finden Sie ein $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ mit $\beta(A, A) = 0$. Folgern Sie, dass β im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ kein Skalarprodukt ist.

Lösung zu Aufgabe 2

Es gilt $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$. Damit gilt

$$\beta(E_{ij}, E_{kl}) = \operatorname{Spur}(E_{ij}E_{kl}) = \delta_{jk}\delta_{il}$$

und somit folgt

$$\mathrm{FM}_{\mathsf{B}}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt insbesondere $\beta(E_{12}, E_{12}) = \delta_{12}\delta_{12} = 0$. Damit ist β im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nicht positiv definit und somit kein Skalarprodukt.