

Aufgabe 1

(8 Punkte)

Es seien β_1 und β_2 die symmetrischen Bilinearformen auf $\mathbb{R}^3$, welche bezüglich der Standardbasis durch die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden.

- a) Bestimmen Sie, welche der β_1 und β_2 positiv-definit, negativ-definit oder indefinit sind.
- b) Diagonalisieren Sie jedes positiv-definite $A \in \{A_1, A_2\}$ orthogonal
- c) *Optionale umbewertete Teilaufgabe:* Nutzen Sie die orthogonalen Diagonalisierungen aus b) um für jedes positiv-definite $A \in \{A_1, A_2\}$ ein symmetrisches $S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $S^2 = A$ zu finden.

Aufgabe 2

(8 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir sagen, dass eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonaldominant ist, falls

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Zeigen Sie, dass jede symmetrische diagonaldominante Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit nicht-negativen Diagonaleinträgen positiv-semidefinit ist.