Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 2 **Sommersemester 2024**

Musterlösung zu Übungsblatt 12 **12.07.2024**

Aufgabe 1

(8 Punkte)

Es seien β_1 und β_2 die symmetrischen Bilinearformen auf $\mathbb{R}^3$, welche bezüglich der Standardbasis durch die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden.

a) Bestimmen Sie, welche der β_1 und β_2 positiv-definit, negativ-definit oder indefinit sind.

b) Diagonalisieren Sie jedes positiv-definite $A \in \{A_1, A_2\}$ orthogonal

c) *Optionale umbewertete Teilaufgabe:* Nutzen Sie die orthogonalen Diagonalisierungen aus b) um für jedes positiv-definite $A \in \{A_1, A_2\}$ ein symmetrisches $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $S^2 = A$ zu finden.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Wir berechnen die (führenden) Hauptminoren von A_1 und A_2:

$$\det(2) = 2 > 0 \qquad \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 6 - 1 = 5 > 0$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(6-1) - 2 > 0$$

$$\det(3) = 3 > 0 \qquad \det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 6 - 4 = 2 > 0$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -12 + 2 = -10 < 0,$$

wobei bei den 3×3-Matrizen jeweils nach der letzten Zeile entwickelt wurde. Da beide Matrizen symmetrisch sind, ist das Hurwitz-Kriterium jeweils anwendbar. Demnach ist die Matrix A_1 (und damit auch β_1) positiv definit, die Matrix A_2 (und damit auch β_2) weder positiv- noch negativ-definit. Es gilt $\beta_2(e_1, e_1) = 3$ und $\beta_2(e_2 + e_3, e_2 + e_3) < 0$. Somit ist β_2 indefinit. Alternativ kann man das Hurwitz-Kriterium nutzen.

b) Es gilt

$$\det\begin{pmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-3 & -1\\ 0 & -1 & \lambda-2\end{pmatrix} = (\lambda-2)\det\begin{pmatrix}\lambda-3 & -1\\ -1 & \lambda-2\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & \lambda-2\end{pmatrix}$$
$$= (\lambda-2)[(\lambda-2)(\lambda-3)-1] + -(\lambda-2)$$
$$= (\lambda-2)[(\lambda-2)(\lambda-3)-2]$$
$$= (\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+4) = (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-4).$$

Es gilt

$$E_1(A_1) = \ker\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \mathrm{LH}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right).$$

$$E_2(A_1) = \ker\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \mathrm{LH}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right).$$

$$E_4(A_1) = \ker\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \mathrm{LH}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$$

Damit ist

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$$

Eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A_1 und somit ist

$$A_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}^T.$$

c) Wir setzen

$$S = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & \sqrt{2} & \\ & & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}^T.$$

Dann ist S symmetrisch und es gilt $S^2 = A_1$.

Aufgabe 2 *(8 Punkte)*

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir sagen, dass eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonaldominant ist, falls

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie, dass jede symmetrische diagonaldominante Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit nicht-negativen Diagonaleinträgen positiv-semidefinit ist.

Lösung zu Aufgabe 2

Wir beweisen dies durch direkte Rechnung. Es gilt

$$\begin{aligned}
x^T Ax &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\left|x_i\right|^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left|a_{ij}x_i x_j\right| \\
&\geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}} \left|a_{ij}\right|\left|x_i\right|^2 - \left|a_{ij}\right|\left|x_i\right|\left|x_j\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \left|a_{ij}\right|\left|x_i\right|^2 + \left|a_{ji}\right|\left|x_j\right|^2 - \left|a_{ij}\right|\left|x_i\right|\left|x_j\right| - \left|a_{ji}\right|\left|x_j\right|\left|x_i\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \left|a_{ij}\right|\left|x_i\right|^2 + \left|a_{ij}\right|\left|x_j\right|^2 - 2\left|a_{ij}\right|\left|x_i\right|\left|x_j\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} \left|a_{ij}\right|\left(\left|x_i\right| - \left|x_j\right|\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Hier haben wir in der zweiten Ungleichung die Diagonaldominanz von A und Nichtnegativität der Diagonalelemente von A genutzt. In der vorletzten Gleichung geht die Symmetrie von A ein.