Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Rafael Dahmen
M.Sc. Maximilian Wackenhuth

Lineare Algebra 2 **Sommersemester 2024**

Musterlösung zu Übungsblatt 13 **19.07.2024**

Aufgabe 1 (*Cartan-Zerlegung/Polarzerlegung*) (*8 Punkte*)

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

a) $A^T A$ ist positiv-definit und es gibt eine symmetrische positiv-definite Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $P^2 = A^T A$.

b) Es gibt ein eindeutiges $U \in O(n)$ mit $A = UP$.

c) Bestimmen Sie P und U für die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Satz 3.4.12 im Skript.

b) Es muss $AP^{-1} = U$ gelten, da P positiv-definit und somit invertierbar ist. Setzen wir $U \coloneqq AP^{-1}$, so gilt

$$U^T U = P^{-1} A^T A P^{-1} = P^{-1} P^2 P^{-1} = I,$$

da $((P^{-1})^T P)^T = P^T P^{-1} = PP^{-1} = I$ und somit $(P^{-1})^T = P^{-1}$.

c) Wir haben $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Es gilt $\det\left(\lambda \mathbb{1}_2 - \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\right) = (\lambda - 5)^2 - 16 = \lambda^2 - 10\lambda + 9$. Damit sind die Eigenwerte $\frac{10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 9}}{2} = \frac{10\pm\sqrt{100-36}}{2} = \frac{10\pm\sqrt{64}}{2} = 5 \pm 4$. Es gilt

$$E_1\left(\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\right) = \ker\left(\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \mathbb{1}_2\right) = \ker\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right). \tag{0.1}$$

Somit muss nach dem Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen

$$E_9\left(\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\right) = E_1\left(\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\right)^{\perp} = \mathrm{LH}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right).$$

Wir sehen also (mit dem Spektralsatz), dass

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{S:=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T,$$

da S orthogonal ist . Setzen wir

$$P \coloneqq S^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

so gilt $P^2 = A^T A$. Es gilt also

$$U := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 *(8 Punkte)*

Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ eine positiv-semidefinite symmetrische Bilinearform. Es sei $V_0 := \{x \in V \mid \beta(x,x) = 0\}$.

a) Zeigen Sie, dass $V_0 = \ker \beta^\vee$ und folgern Sie, dass V_0 eine Vektorraum ist.

Wir definieren auf dem Quotientenraum V/V_0 die Bilinearform β' durch

$$\beta'([x]_{V_0}, [y]_{V_0}) := \beta(x,y)$$

für $[x]_{V_0}, [y]_{V_0} \in V/V_0$.

b) Zeigen Sie, dass β' wohldefiniert ist.

c) Zeigen Sie, dass β' positiv-definit ist.

d) Folgern Sie, dass β' ein Skalarprodukt auf V/V_0 ist.

Hinweis: Sie dürfen Tutorium 12 Aufgabe 2 verwenden.

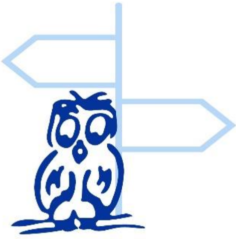
Lösung zu Aufgabe 2

a) Ist $x \in V_0$, so gilt
$$|\beta(y,x)|^2 \leq \beta(x,x)\beta(y,y) = 0$$
und damit ist $x \in \ker(\beta^\vee)$. $\ker(\beta^\vee) \subset V_0$ ist klar.

b) Sind $x' \in [x]_{V_0}$ und $y' \in [y]_{V_0}$, so gilt $x' = x + v_1$ und $y' = y + v_2$ und somit folgt
$$\beta(x', y') = \beta(x + v_1, y + v_2) = \beta(x,y) + \beta(v_1, y) + \beta(x, v_2) + \beta(v_1, v_2) = \beta(x,y).$$
Damit ist β' unabhängig von der Wahl von Vertretern und somit wohldefiniert. Es gilt
$$\begin{aligned} \beta'([x]_{V_0} + \lambda[y]_{V_0}, [z]_{V_0}) &= \beta'([x + \lambda y]_{V_0}, [z]_{V_0}) = \beta(x + \lambda y, z) \\ &= \beta(x,z) + \lambda\beta(y,z) \\ &= \beta'([x]_{V_0}, [x]_{V_0}) + \lambda\beta'([y]_{V_0}, [z]_{V_0}) \end{aligned}$$
für alle $x, y, z \in V$ und somit ist β' linear im ersten Argument. Linearität im zweiten Argument sieht man analog.

c) Gilt $\beta'([x]_{V_0}, [x]_{V_0}) = 0$, so gilt $\beta(x,x) = 0$ und damit ist $x \in V_0$ und $[x]_{V_0} = [0]_{V_0}$. Das $\beta'([x]_{V_0}, [x]_{V_0}) \geq 0$ für alle $x \in V$ ist klar.

d) β' ist eine positiv-definite Bilinearform und damit ein Skalarprodukt auf V/V_0.



Orientierungsveranstaltung – Mit Schwung ins dritte Semester

Du bist gerade im zweiten Semester Informatik und willst Tipps zu der kommenden Prüfungsphase und dem dritten Semester? Dann komm einfach zur Orientierungsveranstaltung der Fachschaft Mathe/Info am

24.07. um 17:30 Uhr in Raum -101 im Infobau (50.34).

Dort beantworten wir Fragen wie:

Wie bereite ich mich auf Klausuren vor? Was mache ich, wenn ich eine Klausur/einen Übungsschein nicht bestanden habe? Welche Ergänzungsfächer gibt es? Welche Möglichkeiten zur Unterstützung gibt es?

Außerdem geben wir dir einen generellen Überblick über die Vorlesungen im dritten Semester, Tipps für PSE sowie zu Tutorenstellen im 3. Semester und vielem mehr.

Zudem sind viele Fachschaftler:innen anwesend, die dir weitere Fragen im Anschluss bei Snacks und Getränken persönlich beantworten können.

Wir freuen uns auf dich!