Lineare Algebra - Zusammenfassung

Diese Zusammenfassung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.
Solltet ihr Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilt sie mir bitte mit: richard.gebauer@student.kit.edu

1 Lineare Algebra II

1.1 Jordan-Normalform (JNF)

Bestimmung der JNF

- Charakteristisches Polynom der Matrix bestimmen: $CP_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{l}(\lambda - c_i)^{r_i}$
- Algebraische Vielfachheit r_i ist Länge des Jordan-Blocks zum Eigenwert c_i
- Bestimme Eigenraum (bzw. dessen Dimension) zum Eigenwert c_i: $E_{c_i} = kern(A - c_i \cdot I)$
- Geometrische Vielfachheit $k_i = \dim(E_{c_i})$ ist Anzahl Jordan-Kästchen im Block zu c_i
- Vielfachheit e_i eines Linearfaktors $(\lambda - c_i)$ im Minimalpolynom ist Länge des größten Jordan-Kästchen im Block zum Eigenwert c_i, d.h. $d_{c_i,1} = e_i$
- Jordan-Blöcke und Kästchen (innerhalb der Blöcke) nach Größe anordnen: Große zuerst
- Jordan-Kästchen der Länge d zum EW c: $J_d(c) = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d}$
- Jordan-Block zum EW c_i: $D_i = D_{B_iB_i}(A|_{H(A,c_i)}) = \begin{pmatrix} J_{d_{c_i,1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{d_{c_i,2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{d_{c_i,k_i}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r_i \times r_i}$
- Jordan-Normalform von A: $\mathrm{JNF}(A) = D_{BB}(A) = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & D_l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Bestimmung der Basis für eine JNF

- Betrachte jeden Eigenwert c
- Bestimme $\mathrm{kern}(A - c \cdot I)^2$, $\mathrm{kern}(A - c \cdot I)^3$, ... bis sich die Dimension des Kerns nicht mehr ändert
- Die kleinste Zahl für die dies so ist, sei p: $\mathrm{kern}(A - c \cdot I)^p = \mathrm{kern}(A - c \cdot I)^{p+1}$
- p ist Vielfachheit des Linearfaktors $(\lambda - c)$ im Minimalpolynom
- Wähle Basisvektoren für $\mathrm{kern}(A - c \cdot I)$, ergänze diese zu Basis von $\mathrm{kern}(A - c \cdot I)^2$, diese wiederum zu Basis von $\mathrm{kern}(A - c \cdot I)^3$ usw.
- Wähle Basisvektoren aus $\mathrm{kern}(A - c \cdot I)^p$, die nicht in $\mathrm{kern}(A - c \cdot I)^{p-1}$ enthalten sind
- Für jeden Vektor v bestimme: $v, (A - c \cdot I) \cdot v, (A - c \cdot I)^2 \cdot v, \ldots, (A - c \cdot I)^{p-1} \cdot v$
- Diese bilden in dieser Reihenfolge Basis des größten Jordan-Kästchen (also der Länge p)

- Zu einem Jordan-Kästchen der Länge k gehören Basisvektoren aus $\text{kern}(A - c \cdot I)^k$
- Sei also k nun die Länge des nächstgrößten Jordan-Kästchen zum EW c
- Wähle wieder Basisvektoren aus $\text{kern}(A - c \cdot I)^k$, die nicht in $\text{kern}(A - c \cdot I)^{k-1}$ liegen
- Bestimme für jeden dieser Vektoren v: $v, (A - c \cdot I) \cdot v, (A - c \cdot I)^2 \cdot v, \dots, (A - c \cdot I)^{k-1} \cdot v$
- Fahre so fort, bis alle Jordan-Kästchen Basisvektoren haben
- Man erhält somit eine Basiswechselmatrix $S = (b_1 | \dots | b_n)$, sodass $\text{JNF}(A) = S^{-1} \cdot A \cdot S$
  d.h. S definiert Basisisomorphismus von B in die Std.basis: $\beta_B : x \mapsto Sx = x_1 \cdot b_1 + \dots + x_n \cdot b_n$

1.2 Skalarprodukt (SKP), Orthonormalbasis (ONB), Orthogonalprojektion

Vektorraum-Paarung V, W K-VR, Abb. $P : V \times W \to K$ Paarung, falls P linear in jedem Argument
Für $V = W$: heißt P Bilinearform auf V
P heißt nicht ausgeartet, falls $\forall w_0 \neq 0, v_0 \neq 0 : P(\cdot, w_0) \neq 0, P(v_0, \cdot) \neq 0$
Bilinearform P heißt symmetrisch, falls $\forall v, w \in V : P(v, w) = P(w, v)$

Fundamentalmatrix V, W K-VR mit Basen $B = (b_1, \dots, b_m)$, $C = (c_1, \dots, c_n)$, P VR-Paarung

$$D_{BC}(P) := (P(b_i, c_j))_{ij} \in K^{m \times n}$$

$$P(v, w) = D_B(v)^T \cdot D_{BC}(P) \cdot D_C(w)$$

Sesquilinearform V K-VR, $s : V \times V \to K$ heißt Sesquilinearform, falls $\forall x, y, z \in V, \alpha \in K$:

$$s(\alpha x + y, z) = \alpha \cdot s(x, z) + s(y, z) \quad \text{und} \quad s(x, \alpha y + z) = \overline{\alpha} s(x, y) + s(x, z)$$

s heißt hermitesch (für $K = \mathbb{C}$) bzw. symmetrisch (für $K = \mathbb{R}$), falls $s(y, x) = \overline{s(x, y)}$ (schiefsymmetrisch)

Skalarprodukt Schiefsymm. Sesquilinearform s heißt Skalarprodukt auf V, falls es positiv definit ist:

$$\forall x \in V : s(x, x) \geq 0 \quad \text{und} \quad s(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Schreibe: $\langle x, y \rangle := s(x, y)$

Norm $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \ \ \forall x \in V$

Orthogonalität V VR mit Skp. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und zugehöriger Norm $\| \cdot \|$

$$x, y \in V \text{ senkrecht bzw. orthogonal} \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, y \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \perp y$$

$$M, N \subset V \text{ orthogonal} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in M, y \in N : x \perp y \quad \Leftrightarrow \quad M \perp N$$

$$B \subset V \text{ Orthogonalsystem (OGS)} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, y \in B : x \neq y \Rightarrow x \perp y$$

$$B \subset V \text{ Orthonormalsystem (ONS)} \quad \Leftrightarrow \quad B \text{ OGS und } \forall x \in B : \|x\| = 1$$

$$B \subset V \text{ Orthogonalbasis (OGB)} \quad \Leftrightarrow \quad B \text{ Basis von } V \text{ und OGS}$$

$$B \subset V \text{ Orthonormalbasis (ONB)} \quad \Leftrightarrow \quad B \text{ Basis von } V \text{ und ONS}$$

Erhard-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

- Sei $(b_i)_i$ lin. unabhängig. Wollen OGS $(c_i)_i$ finden, sodass $\langle (b_i)_i \rangle = \langle (c_i)_i \rangle$
- Setze $c_0 = b_0$ und rekursiv: $c_n = b_n - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\langle b_n, c_i \rangle}{\langle c_i, c_i \rangle} \cdot c_i$

Orthogonalraum $M \subset V$. Orthogonales Komplement von M:

$$M^{\perp} := \{y \in V; y \perp M\}$$

Orthogonalprojektion $U \subset V$ endl.dim. Teilraum

- $\forall x \in V : \exists! y \in U : d := \|x - y\| = \min\{\|x - u\|; u \in U\}$
- $y \in U$, $x - y \perp U$
- Definiere orthogonale Projektion auf U: $\pi_U(x) := y$
- Es gilt: $\pi_U \in \mathrm{End}_{stetig}(V)$, $\pi_U^2 = \pi_U$ (unipotent), $\|\pi_U(x)\| \leq \|x\|$
- d heißt Abstand von x von U, $z := x - y$ Lot von x auf U, y Lotfußpunkt
- Sei $(b_1, \ldots, b_l)$ ONB von U: $\pi_U(v) = \sum_{i=1}^{l} \langle v, b_i \rangle \cdot b_i$
- Abstand $d(\{x\}, U) := \|z\| = \|\pi_{U^{\perp}}(x)\| = \|x - \pi_U(x)\|$

1.3 Adjungierte, Selbstadjungierte

Adjungierte Matrix $A^* := \overline{A}^T$

Adjungierter Homomorphismus $\Phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$. $\Psi \in \mathrm{Hom}(W, V)$ heißt zu Φ adjung. Hom., falls:

$$\forall x \in V, y \in W : \quad \langle \Phi(x), y \rangle_W \quad = \quad \langle x, \Psi(y) \rangle_V$$

Schreibe: $\Psi =: \Phi^*$ und setze $\mathrm{Hom}^a(V, W) := \{\Phi : V \to W; \Phi^* \text{ existiert}\}$
Mit ONB B gilt: $D_{BB}(\Phi^*) = D_{BB}(\Phi)^*$

Selbstadjungierte Endomorphismen $\Phi \in \mathrm{End}^a(V)$ selbstadjungiert, falls $\Phi = \Phi^*$
Φ selbstadjungiert $\Leftrightarrow$ $D_{BB}(\Phi) = D_{BB}^*(\Phi)$, d.h. hermitesch
Φ selbstadjungiert $\Rightarrow$ Φ normal
$A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ mit $A = A^*$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Spec}(A) \subset \mathbb{R}$
Für A hermitesch gilt: A positiv definit $\Leftrightarrow$ $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(A) : \lambda > 0$

Spektralradius V $\mathbb{C}$-VR, $\Phi \in \mathrm{End}(V)$: Spektralradius $\rho(\Phi) := \sup\{|\lambda|; \lambda \in \mathrm{Spec}(\Phi)\}$

Norm von linearen Abbildungen $A \in K^{m \times n}$: $\|A\| := \sup\{\|Ax\|; \|x\| \leq 1\}$
Es gilt: $\|A\| = \sqrt{\rho(A^*A)}$ und für normale A mit $m = n$ gilt: $\|A\| = \rho(A)$

1.4 Isometrien, Isometrienormalform (INF)

Morphismus von VR mit Sesquilinearformen V_1, V_2 K-VR mit Sesquilinearformen s_1, s_2

$$\Phi \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2) \text{ mit } s_2(\Phi(x), \Phi(y)) = s_1(x, y) \quad \forall x, y \in V_1$$

(Lin.) Isometrie Φ Morphimus von VR mit Sesquilinearformen und bijektiv
Isometrie $\Phi : (V, s) \to (V, s)$ heißt Automorphismus von s
Φ Isometrie $\Leftrightarrow$ $\Phi \in \mathrm{End}^a(V)$ und $\Phi^* = \Phi^{-1}$ $\Leftrightarrow$ $\forall x \in V : \|x\| = \|\Phi(x)\|$ $\Leftrightarrow$ $\forall y \in V : \|y\| \Rightarrow \|\Phi(y)\| = 1$

Isometrienormalform (INF)

Im unitären VR V n-dim. unitärer VR, $\phi : V \to V$ unitär.
Dann ex. ONB aus EV von V und für alle EW gilt: $|\lambda| = 1$

Im euklidischen VR V n-dim eukl. VR, $\phi : V \to V$ orthogonal. Dann ex. ONB B von V, sodass:

$$D_{BB}(\phi) = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, D_{\varphi_1}, \dots, D_{\varphi_l}) \quad \text{mit } D_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

und ϕ hat als reelle EW nur ± 1. Für komplexe EW gilt: λ EW $\Rightarrow$ $(x^2 - 2\mathrm{Re}(\lambda)x + 1) | CP_\phi(x)$, $|\lambda| = 1$
Mit $\cos\varphi = \mathrm{Re}(\lambda)$ bzw. $\sin\varphi = \mathrm{Im}(\lambda)$ erhält man den Drehwinkel des zugehörigen Drehkästchens.
Eine ONB erhält man mit den normierten EV von ± 1 und für die Drehkästchen wähle
$v \in \mathrm{kern}(x^2 - 2\mathrm{Re}(\lambda)x + 1)$: $(v, \phi(v))$ ist Basis des Drehkästchens. Noch orthonormieren: Fertig!

1.5 unitäre VR, normale Endomorphismen

normale Endomorphismen $\Phi \in \mathrm{End}^a(V)$ ist normal, falls $\Phi \cdot \Phi^* = \Phi^* \cdot \Phi$ bzw.:

$$\forall x, y \in V : \langle \Phi^*(x), \Phi^*(y) \rangle = \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle$$

Mit ONB B gilt für $A := D_{BB}(\Phi)$ auch: Φ normal $\Leftrightarrow$ $A \cdot A^* = A^* \cdot A$

Spektralsatz für normale Endomorphismen V endl.dim VR mit Skp., $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ normal
Falls $K = \mathbb{R}$ dann habe CP_Φ nur reelle NS. Dann besitzt V eine ONB aus Eigenvektoren von Φ

unitäre Endomorphismen $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ unitär $\Leftrightarrow$ Φ normal und $\forall \lambda \in \mathrm{Spec}(\Phi) : |\lambda| = 1$

Drehkästchennormalform V endl.dim. $\mathbb{R}$-VR mit Skp., $\Psi \in \mathrm{End}(V)$ normal. Dann gilt:

- $CP_\Psi(x) = \prod_{j=1}^r (x - \lambda_j) \cdot \prod_{k=1}^s (x - \lambda_{r+k})(x + \overline{\lambda_{r+k}})$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_{r+s} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
- $\exists$ ONB $C = \{c_1, \dots, c_r, c_{r+1}, c'_{r+1}, \dots, c_{r+s}, c'_{r+s}\}$ von V, sodass $D_{CC}(\Psi)$ DrehkästchenNF hat:

$$D_{CC}(\Psi) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \gamma_1 D_{\phi_1}, \dots, \gamma_s D_{\phi_s}) \quad \text{mit } D_\phi := \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

- Ψ orthogonal: Siehe Isometrienormalform (INF) ($\forall$ EW $\lambda : |\lambda| = 1$)

1.6 affine Geometrie, affine Abbildungen, Quadriken

Affiner Raum V endl.dim. K-VR. $A \neq \emptyset$ heißt affiner Raum mit Richtung(svektorraum) V, falls:

- $\forall P \in A : 0 + P = P$
- $\forall x, y \in V : x + (y + P) = (x + y) + P$
- $\forall P, Q \in A : \exists! x \in V : Q = x + P$ (Translationsvektor $x = \overrightarrow{PQ}$)

Affiner Teilraum $B \subset A$, $B \neq \emptyset$ heißt lineare Varietät in A, falls:
$\exists$ VR $U_B \subset V : B$ affiner Raum mit Richtung U_B $B = \emptyset$ wird ebenfalls affiner Raum genannt
B aff. TR von A $\Leftrightarrow$ $\exists P \in A : \exists$ UVR $U \subset V : B = U + P$ $\overset{|K| \geq 2}{\Longleftrightarrow}$ $\forall P, Q \in B : P \neq Q \Rightarrow PQ \subset B$

Affine Hülle von $M \subset A$

$$[M] := \bigcap_{B \text{ aff. TR}, \, B \supset M} B$$

Für $M = \{P_1, \dots, P_m\}$ schreibe $[M] =: [P_1, \dots, P_m]$
$[P_0, \dots, P_m]$ in allgemeiner Lage, falls $\dim[P_0, \dots, P_m] = m$ $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{P_0 P_i})_{i=1\dots m}$ linear unabhängig

Parallelität Affine TR $B, C \subset A$ sind parallel ($B \parallel C$), falls: $U_B \subset U_C$ oder $U_C \subset U_B$

Affines Koordinatensystem A AR mit Richtung V, $\dim A = n$.
Ein Paar $\mathcal{K} := (O, B) \in A \times \{\text{Basen von } V\}$ heißt affines Koordinatensystem mit Ursprung O
$D_{\mathcal{K}} : A \to K^n, P \mapsto D_B(\overrightarrow{OP})$ die Koordinatenvektorabbildung
$\mathcal{D}_{\mathcal{K}} : A \to \mathbb{A}_n(K)$ Koordinatendarstellung zum KS $\mathcal{K}$

Morphismus affiner Räume A, B AR mit Richtungen V, W. Abb $\varphi : A \to B$ heißt affin, falls:

$$\exists \Phi \in \mathrm{Hom}(V, W) : \varphi(x + P) = \Phi(x) + \varphi(P) \quad \forall x \in V, P \in A$$

Setze $\mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, B) := \{\varphi \in \mathrm{Abb}(A, B); \varphi \text{ affin}\}$. Es gilt:

- φ affin mit zugeh. $\Phi \quad \Leftrightarrow \quad \exists P_0 \in A : \forall x \in V : \varphi(x + P_0) = \Phi(x) + \varphi(P_0)$
- $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, B) \quad \Rightarrow \quad$ zugeh. $\Phi =: \Lambda_\varphi$ ist eindeutig
- φ affin: φ injektiv/surjektiv $\quad \Leftrightarrow \quad \Lambda_\varphi$ injektiv/surjektiv
- φ affin und bijektiv heißt Affinität oder für $A = B$ Automorphismus
- $\psi : K^n \to K^m$ affin $\quad \Leftrightarrow \quad \exists A \in K^{m \times n}, a \in K^n : \psi(x) = Ax + a$, Schreibe daher: $\psi =: (A, a)$

Fixpunkt, -raum & -richtung A AR mit Richtung V, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{aff}}(A, A)$

- $P \in A$ heißt Fixpunkt von φ, falls $\varphi(P) = P$
- Aff. TR $B \subset A$, $B \neq \emptyset$ heißt Fixraum von φ, falls $\varphi(B) \subset B$
- UVR $U \subset V$ heißt Fixrichtung von φ, falls $\Lambda_\varphi(U) \subset U$

Geradentreue Abb. A AR, Abb. $\phi : A \to A$ ist geradentreu, falls: $G \subset A$ Gerade $\quad \Leftrightarrow \quad \phi(G)$ Gerade
Es gilt: ϕ Affinität $\quad \Rightarrow \quad \phi$ geradentreu
Für $\dim A > 1$, $K = \mathbb{F}_p$ mit $p \neq 2$ oder $K = \mathbb{Q}$ gilt: φ Affinität $\quad \Leftrightarrow \quad \varphi$ bijektiv und geradentreu

Euklidischer Raum Paar $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit E AR über $\mathbb{R}$ und Skp. auf Richtung $U_E = V$ von E

Abstand von $P, Q \in E$: $d(P, Q) := \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle}$

cartesisches Koordinatensystem $\mathcal{K} = (O, B)$ auf euklid. Raum E mit ONB B bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Bewegungen E, F euklid. Räume, $\varphi : E \to F$

- φ heißt längentreu, falls $d(\varphi(P), \varphi(Q)) = d(P, Q) \quad \forall P, Q \in E$
- φ heißt isometrisch, falls φ affin und längentreu
- φ heißt Bewegung von E, falls $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{aff}}(E)$ und isometrisch
- φ heißt eigentliche Bewegung, falls zusätzlich $\det(\Lambda_\varphi) = 1$ gilt

Ortogonalität affiner Teilräume $A \perp B \quad \Leftrightarrow \quad U_A \perp U_B$

Gemeinsames Lot von A, B mit Lotfußpunkten P^+, Q^+:
Gerade G mit $G \perp A$, $G \perp B$, $G \cap A = \{P^+\}$, $G \cap B = \{Q^+\}$
$A, B \subset \mathbb{R}^n$ ATR, $A, B \neq \emptyset$, $\dim(U_A + U_B) < n \quad \Rightarrow \quad \exists!$ gem. Lot G mit P^+, Q^+ und $d(A, B) = d(P^+, Q^+)$

Abstandsbestimmung: Mit LGS

- A, B lassen sich mit Stützvektor und Basisvektoren schreiben als: $A = \sum_{i=1}^{s} \mathbb{R}x_i + x_0, \quad B = \sum_{j=1}^{r} \mathbb{R}y_j + y_0$
- Sei $P^+ = \sum_i \lambda_i x_i + x_0$, $Q^+ = \sum_j \mu_j y_j + y_0$
- Unbestimmte λ_i, μ_j lassen sich mit folgendem LGS ermitteln:

$$\langle x_i, P^+ - Q^+ \rangle = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, s\}$$

$$\langle y_j, P^+ - Q^+ \rangle = 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, r\}$$

- Mit den Lotfußpunkten ergibt sich schließlich der Abstand $d(A, B) = d(P^+, Q^+)$

Abstandsbestimmung: Mit ONB

- Bestimme ONB $\{b_1, \ldots, b_t\}$ für $(U_A + U_B)^\perp$
- Dann gilt: $d(A, B) = \sqrt{\sum_{\tau=1}^{t} \langle x_o - y_o, b_\tau \rangle^2}$

Bewegungen von $\mathbb{A}_2(\mathbb{R})$ Zu $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{dist}}(\mathbb{R}^2)$ ex. KS $\mathcal{L}$, sodass $\mathcal{D}_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\varphi)$ eine der folgenden NF hat:

- $(I, 0) = id$
- $(I, \lambda e_1)$ Translation $(\lambda > 0)$, kein Fixpunkt
- $(D_\alpha, 0)$ Drehung $(0 < \alpha \leq \pi)$, genau ein Fixpunkt
- $(C, 0)$ Spiegelung an Achse, Fixpunktmenge = Achse
- $(C, \lambda e_1)$ Gleitspiegelung, kein Fixpunkt, genau 1 Fixgerade

Mit $D_\alpha := \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$ und $C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Affine Quadrik $A \in K^{n \times n}$ symmetrisch, $b \in K^n$, $\gamma \in K$, $f : K^n \to K, x \mapsto x^T A x + 2b^T x + \gamma$

$$\mathcal{Q} := \mathcal{N}(f) = \{x \in K^n; f(x) = 0\}$$

Quadratische Ergänzung $A \in K^{n \times n}$ symmetrisch, $\mathrm{Rang}(A) = r$, $\mathrm{Char}(K) \neq 2$ Dann:

$$\exists C \in GL_n(K) : C^T A C = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, 0 \ldots, 0)$$

Trägheitssatz von Sylvester $A \in K^{n \times n}$ symmetrisch, $\mathrm{Rang}(A) = r$

$$K = \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \exists C \in GL_n(\mathbb{C}) : C^T A C = \mathrm{diag}(\overbrace{1, \ldots, 1}^{r}, 0, \ldots, 0)$$

$$K = \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \exists C \in GL_n(\mathbb{R}) : C^T A C = \mathrm{diag}(\overbrace{1, \ldots, 1}^{p}, \overbrace{-1, \ldots, -1}^{q}, 0, \ldots, 0)$$

und p, q durch A eindeutig bestimmt

Mittelpunkt $f(x) = x^T A x + 2b^T x + \gamma$. Falls ex., heißt Lsg. des LGS $Az = -b$ Mittelpunkt der Quadrik

Affine Normalform für Quadriken mit Mittelpunkt

$$\text{Allg. Körper} \;\Rightarrow\; f = \alpha_1 X_1^2 + \ldots + \alpha_r X_r^2 + \begin{cases} 0 & \text{falls } \gamma' = 0 \\ 1 & \text{falls } \gamma' \neq 0 \end{cases}$$

$$K = \mathbb{C} \;\Rightarrow\; f = X_1^2 + \ldots + X_r^2 + \begin{cases} 0 & \text{falls } \gamma' = 0 \\ 1 & \text{falls } \gamma' \neq 0 \end{cases}$$

$$K = \mathbb{R} \;\Rightarrow\; f = X_1^2 + \ldots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \ldots - X_{p+q}^2 + \begin{cases} 0 & \text{falls } \gamma' = 0 \\ 1 & \text{falls } \gamma' \neq 0 \end{cases} \quad (\text{OBdA: } p \leq q)$$

Affine Normalform für Quadriken ohne Mittelpunkt

$$K = \mathbb{C} \;\Rightarrow\; f = X_1^2 + \ldots + X_r^2 - 2X_{r+1}$$
$$K = \mathbb{R} \;\Rightarrow\; f = X_1^2 + \ldots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \ldots - X_{p+q}^2 - 2X_{r+1} \quad (\text{OBdA: } p \geq q)$$

Affine Äquivalenz $F, \tilde{F}$ quadratische Polynome affin äquivalent falls:

$$\exists \text{ Affinität } \Phi(X) = MX + t \text{ auf } \mathbb{A}^n(K),\ \text{Einheit } e \in K^\times : \tilde{F}(X) = e \cdot F(MX + t)$$

Bestimmung der affinen Normalform

- Quadratische Ergänzung nacheinander in den einzelnen Variablen durchführen (z.B: zuerst in x, dann in y, dann in z...)
- Mit anderem Variablenset (affin, also höchstens linear) substituieren (z.B: $u = 2x + 3z - 7$)
- Substitution beschreibt affine Transformation der Quadrik in NF: $(A, a) : K^n \to K^n, X \mapsto A \cdot X + a$

Euklidische Klassifikation Nur Orthogonale Transformationen zugelassen, d.h. $C \in O_n$

$$\text{Spektralsatz} \;\Rightarrow\; \exists C \in O_n : C^T AC = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0) \quad (\text{OBdA: } \lambda_i \geq \lambda_{i+1})$$

Erhalten Normalformen:

- $\lambda_1 X_1^2 + \ldots + \lambda_r X_r^2$
- $\lambda_1 X_1^2 + \ldots + \lambda_r X_r^2 + 1$
- $\lambda_1 X_1^2 + \ldots + \lambda_r X_r^2 - 2X_{r+1}$