I.1 (4 Punkte)

Es seien G und G' zwei Gruppen sowie $\Phi : G \to G'$ und $\Psi : G \to G'$ Gruppenhomomorphismen. Zeigen Sie:

Ist H eine echte Untergruppe von G und gilt $\Phi(a) = \Psi(a)$ für alle $a \in G \backslash H$, so folgt $\Phi = \Psi$.

Lösung:

Zu zeigen ist: $\forall x \in G : \Phi(x) = \Psi(x)$.

Für $x \in G \backslash H$ ist dies nach Voraussetzung erfüllt.

Noch zu zeigen: $\forall x \in H : \Phi(x) = \Psi(x)$.

Beweis: Sei $x \in H$.

Da H echte Untergruppe von G ist, existiert ein $a \in G \backslash H$.

Es gilt dann $xa \notin H$. Denn die Annahme $xa \in H$ führt auf den Widerspruch $a = x^{-1}(xa) \in H$, da die Verknüpfung zweier Elemente aus der Untergruppe H wieder in H liegen müsste.

Nach Voraussetzung folgt damit weiter: $\Phi(xa) = \Psi(xa)$.

Da Φ und Ψ Homomorphismen sind ergibt sich $\Phi(x)\Phi(a) = \Psi(x)\Psi(a)$, mit $\Phi(a) = \Psi(a)$ nach Voraussetzung.

Verknüpfung von rechts mit dem Element $\Phi(a)^{-1} = \Psi(a)^{-1}$ ergibt letztendlich $\Phi(x) = \Psi(x)$.

I.2 (4 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen gelten für jede k-elementige Teilmenge $A = \{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k\}$ ($k \geq 2$) eines K-Vektorraums V? Beweisen Sie die Aussagen oder widerlegen Sie diese durch Angabe eines Gegenbeispiels.

a) Ist A linear abhängig, so ist jeder Vektor $\boldsymbol{a} \in A$ Linearkombination der übrigen Vektoren aus A.

b) Gibt es einen Vektor $\boldsymbol{x} \in V$, der sich eindeutig als Linearkombination von $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ schreiben lässt, so ist A linear unabhängig.

c) Ist A linear unabhängig und $\boldsymbol{x} \in V$ beliebig, so ist $\{\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{x}, \dots, \boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{x}\}$ linear unabhängig.

d) Ist A linear unabhängig, so sind auch die Vektoren

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3, \dots,\ \boldsymbol{a}_{k-1} + \boldsymbol{a}_k,\ \boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_1$$

linear unabhängig.

Lösung:

a) FALSCH!

Gegenbeispiel: $A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ ist linear abhängig, aber $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist keine Linearkombination von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) RICHTIG!

Beweis: Sei $\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + x_k \boldsymbol{a}_k$ mit $x_1, \dots, x_k \in K$ die eindeutige Darstellung des Vektors $\boldsymbol{x}$. Sei $y_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + y_k \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{o}$ eine Darstellung des Nullvektors mit $y_1, \dots, y_k \in K$. Dann ist $(y_1 + x_1) \boldsymbol{a}_1 + \dots + (y_k + x_k) \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{x}$ ebenfalls eine Darstellung von $\boldsymbol{x}$, für die wegen der Eindeutig der Darstellung $y_1 + x_1 = x_1, \dots, y_k + x_k = x_k$ beziehungsweise $y_1 = \dots = y_k = 0$ gelten muss. Also sind die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ linear unabhängig und damit die Menge A.

c) FALSCH!

Gegenbeispiel: $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ ist linear unabhängig. Für $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear abhängig.

d) FALSCH!

Gegenbeispiel: $A = \left\{ \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$ ist linear unabhängig. Aber es ist

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also sind die Vektoren $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_1$ linear abhängig.

I.3 (4 Punkte)

Es sei A eine reelle (p,n)-Matrix mit $p \geq 1$ und $n \geq 1$. Geben Sie an, ob die folgenden Schlüsse richtig ('r') oder falsch ('f') sind. Beweise sind dabei nicht verlangt.

	$\Leftarrow$	$\Rightarrow$	
$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist lösbar			$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ ist lösbar
$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist lösbar			$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ ist eindeutig lösbar
$\exists \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p \backslash \{\boldsymbol{o}\} : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist lösbar			Rang $A = \min(p,n)$
$\exists \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p \backslash \{\boldsymbol{o}\} : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist lösbar			$\exists \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p \backslash \{\boldsymbol{o}\} : A^T A\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b}$ ist lösbar

Hinweis zur Punktevergabe:
Jedes Kästchen wird wie folgt bewertet: richtige Antwort: $+0,5$ Punkte
falsche Antwort: $-0,5$ Punkte
keine Antwort: 0 Punkte
Ist die Summe negativ, so wird die Aufgabe mit Null Punkten bewertet, ansonsten ist die Summe auch gleich der Punktezahl.

Lösung:

	$\Leftarrow$	$\Rightarrow$	
$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist lösbar	f	r	$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ ist lösbar
$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist lösbar	f	f	$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ ist eindeutig lösbar
$\exists \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p \backslash \{\boldsymbol{o}\} : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist lösbar	r	f	Rang $A = \min(p,n)$
$\exists \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p \backslash \{\boldsymbol{o}\} : A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ist lösbar	f	r	$\exists \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p \backslash \{\boldsymbol{o}\} : A^T A\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b}$ ist lösbar

I.4 (4 Punkte)

Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K und V^* sein Dualraum. Für jede Teilmenge $M \subset V$ sei

$$M^\circ := \{\Phi \in V^* \,|\, \forall\, \boldsymbol{x} \in M : \Phi(\boldsymbol{x}) = 0\} .$$

a) Zeigen Sie, dass M° für jede Teilmenge $M \subset V$ ein Untervektorraum von V^* ist.

b) Weisen Sie nach, dass für jeden Untervektorraum U von V

$$\dim U + \dim U^\circ = n$$

gilt.

c) Bestimmen Sie für den reellen Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ und

$$M = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \}$$

eine Basis von M°.

Lösung:

a) Offensichtlich ist $M^\circ \neq \emptyset$, denn die Nullabbildung $\Omega : \boldsymbol{x} \mapsto 0$ ist Element von M°.
Für $\Phi, \Psi \in M^\circ$ ist auch $\Phi + \Psi \in M^\circ$, denn $\forall\, \boldsymbol{x} \in M$: $(\Phi + \Psi)(\boldsymbol{x}) = \Phi(\boldsymbol{x}) + \Psi(\boldsymbol{x}) = 0 + 0 = 0$.
Für $\Phi \in M^\circ$ und $\alpha \in K$ ist auch $\alpha\Phi \in M^\circ$, denn $\forall\, \boldsymbol{x} \in M$: $(\alpha\Phi)(\boldsymbol{x}) = \alpha\Phi(\boldsymbol{x}) = \alpha 0 = 0$.
Nach dem Untervektorraumkriterium ist damit M° ein Untervektorraum von V^*.

b) Für $U = V$ [$\Rightarrow U^\circ = \{\Omega\}$] und $U = \{\boldsymbol{o}\}$ [$\Rightarrow U^\circ = V^*$] ist die Aussage richtig.
Sei $\dim U = k$ ($1 \leq k \leq n-1$) und $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k\}$ eine Basis von U, die durch $\boldsymbol{b}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ zu einer Basis $B = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ von V ergänzt wird. Sei $B^* = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ die Dualbasis von B.

Beh.: Für $U = [\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k]$ gilt $U^\circ = [\Phi_{k+1}, \ldots, \Phi_n]$.
Bew.: Für $\Phi = \alpha_1\Phi_1 + \ldots + \alpha_n\Phi_n \in U^\circ$ gilt für alle $i = 1, \ldots, k$: $(\alpha_1\Phi_1 + \ldots + \alpha_n\Phi_n)(\boldsymbol{b}_i) = \alpha_i\Phi_i(\boldsymbol{b}_i) = \alpha_i = 0$. Also gilt $U^\circ \subset [\Phi_{k+1}, \ldots, \Phi_n]$. Umgekehrt zeigt diese Rechnung, dass auch $(\alpha_k\Phi_k + \ldots + \alpha_n\Phi_n)(\boldsymbol{b}_i) = 0$ für $i = 1, \ldots k$ gilt, woraus $[\Phi_{k+1}, \ldots, \Phi_n] \subset U^\circ$ folgt.

Damit gilt insgesamt: $\dim U + \dim U^\circ = k + (n-k) = n$.

c) $A = (\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13})$ sei die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich der Standardbasis. Aus $A\boldsymbol{x} = 0$ für alle $\boldsymbol{x} \in M$ ergibt sich ein homogenes LGS für die zu bestimmenden Koeffizienten α_{11}, α_{12} und α_{13}.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit haben alle $\Phi \in M^\circ$ das Aussehen $\Phi : \boldsymbol{x} \mapsto \alpha_{11}(1, -1, 1)\,\boldsymbol{x}$ und die Abbildung $\Phi_1 : \boldsymbol{x} \mapsto (1, -1, 1)\,\boldsymbol{x}$ ist eine Basis von M°.

I.5 (4 Punkte)
Die Matrizen

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und } B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

seien Abbildungsmatrizen zweier Endomorphismen Φ und Ψ des $\mathbb{R}^3$ bezüglich der Standardbasis.

a) Berechnen Sie A^2, B^2, AB und BA.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^3$ eine Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren von Φ und Ψ besitzt, und stellen Sie die Endomorphismen in einer solchen Basis dar.

Lösung:

a) Die Matrixprodukte sind

$$A^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B^2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad AB = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = BA$$

b) Aus $AB = BA$ folgt, dass eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus gemeinsamen Eigenvektoren der beiden Endomorphismen existiert.
Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom von A und B:

$$p_A(\lambda) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \begin{vmatrix} 1-3\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 3-3\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 2-3\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-3\lambda & -2 \\ -1 & 2-3\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)^2$$

$$p_B(\lambda) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \begin{vmatrix} -3\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 2-3\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-3\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 (-\lambda) \begin{vmatrix} 2-3\lambda & 2 \\ 1 & 1-3\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2(\lambda-1)$$

Bestimmung des Eigenraums E_0^A von Φ zum Eigenwert 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies E_0^A = [\boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}]$$

Bestimmung des Eigenraums E_1^A von Φ zum Eigenwert 1:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies E_1^A = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]$$

Analog berechnen sich die Eigenräume E_1^B zum EW 1 bzw. E_0^B zum EW 0 von Ψ:

$$E_1^B = [\boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}] \text{ und } E_0^B = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}]$$

Wegen $B\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ gilt $\boldsymbol{a} \in E_0^A \cap E_0^B$. Wegen $A\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$ gilt $\boldsymbol{a} \in E_1^B \cap E_1^A$.

Wegen $\boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_1^A \cap E_0^B$ haben die Endomorphismen in der gemeinsamen Eigenbasis $\{\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}\}$ die Gestalt

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I.6 (4 Punkte)

Es seien $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^n, b, c \in \mathbb{R}$ und für alle $i, j = 1, \ldots, n$ gelte

$$a_{ij} := \boldsymbol{x}_i^T \boldsymbol{x}_j = \begin{cases} b & \text{für } i = j, \\ c & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Weiter sei M die Matrix mit den Spalten $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$.

Berechnen Sie den Betrag von $\det M$.

Lösung:

Sei A_n die (n,n)-Matrix $A_n = (a_{ij})$. Es ist $\det A_1 = b$. Für $n \geq 2$ gilt

$$\det A_n = \begin{vmatrix} b & c & \cdots & & c \\ c & b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b & c \\ c & \cdots & c & c & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-c & 0 & \cdots & & c-b \\ 0 & b-c & 0 & \cdots & c-b \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b-c & c-b \\ c & c & \cdots & c & b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b-c & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & b-c & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b-c & 0 \\ c & c & \cdots & c & b+(n-1)c \end{vmatrix} = (b-c)^{(n-1)} \cdot (b+(n-1)c)$$

Bei den Umformungen wurde zuerst die letzte Zeile von allen anderen Zeilen subtrahiert. Danach wurden die ersten (n-1) Spalten zur letzten Spalte dazuaddiert.

Für die Matrix $M = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ gilt $M^T M = A_n$. Deshalb ist $(\det M)^2 = \det A_n$ oder

$$|\det M| = \sqrt{(b-c)^{(n-1)} \cdot (b+(n-1)c)}.$$

II.1 (4 Punkte)

Es sei Φ ein Endomorphismus eines fünfdimensionalen komplexen Vektorraums V mit dem charakteristischen Polynom

$$p = X^5 - 9X^3.$$

Ferner sei $\dim(\mathrm{Kern}\,\Phi) = 1$.

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von $\Phi \circ \Phi$.

Lösung

Wegen $p = X^3(X-3)(X+3)$ hat Φ eindimensionale Eigenräume zu den Eigenwerten $+3$ (Eigenvektor $\boldsymbol{b}_1$) und -3 (Eigenvektor $\boldsymbol{b}_2$). Außerdem hat Φ einen dreidimensionalen Hauptraum zum Eigenwert 0 . Weil der Eigenraum zum Eigenwert 0 mit $\mathrm{Kern}\Phi$ identisch ist und der Kern eindimensional ist, gibt es ein einziges Jordankästchen zum Eigenwert 0. Eine zugehörige Jordanbasis sei $\{\boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4, \boldsymbol{b}_5\}$. Bezüglich der Basis $B = \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_5\}$ lautet die Jordannormalform von Φ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich B hat Φ^2 dann die Abbildungsmatrix

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

die bezüglich der Basis $C = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_5, \boldsymbol{b}_4\}$ die Jordansche Normalform von Φ^2

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

annimmt.

II.2 (4 Punkte)

Es sei V der reelle Vektorraum der auf dem abgeschlossenen Intervall $[-1,1]$ stetigen reellen Funktionen. Auf V ist durch

$$\langle g,h\rangle := \int_{-1}^{1} g(x)h(x)dx$$

ein Skalarprodukt erklärt, das eine Norm $\|\cdot\|$ induziert. Weiter bezeichne Π die Orthogonalprojektion auf den von den Funktionen $p_i : x \mapsto x^i$ $(i=0,1,2)$ aufgespannten Untervektorraum U.

Bestimmen Sie das Bild $\Pi(f)$ der Funktion $f : x \mapsto x^3+1$ unter der Orthogonalprojektion Π, sowie den Abstand $d(f,U) := \|\Pi(f)-f\|$.

Lösung

Zunächst gilt für $i,k \in \{0,1,2,3,\dots\}$:

$$\langle p_i,p_k\rangle = \int_{-1}^{1} x^{i+k}dx = \frac{1}{i+k+1}x^{i+k+1}\Big|_{-1}^{1} = \begin{cases} 0 & \text{für } i+k \text{ ungerade} \\ \frac{2}{i+k+1} & \text{für } i+k \text{ gerade} \end{cases} .$$

Insbesondere liest man daran ab, dass gerade Funktionen zu ungeraden Funktionen orthogonal sind. Entsprechend ist $U = U_1 \oplus U_2$ orthogonale Summe von $U_1 := [X]$ und $U_2 := [1, X^2]$ und es ist $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$ die Summe der Orthogonalprojektionen auf die Untervektorräume U_1 bzw. U_2. Wegen $1 \in U$ gilt $\Pi(1) = 1$ und es folgt

$$\begin{aligned} \Pi(x^3+1) &= \Pi_1(x^3) + \underbrace{\Pi_2(x^3)}_{=O} + \underbrace{\Pi(1)}_{=1} \\ &= \frac{\langle x^3,x\rangle}{\langle x,x\rangle}\cdot x + 1 \\ &= \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}}\cdot x + 1 = \frac{3}{5}\cdot x + 1. \end{aligned}$$

Für den Abstand $d(f,U)$ gilt

$$\begin{aligned} d(f,U) = \|\Pi(f)-f\| &= \|\frac{3}{5}x - x^3\| \\ &= \sqrt{\frac{9}{25}\langle x,x\rangle - \frac{6}{5}\langle x,x^3\rangle + \langle x^3,x^3\rangle} \\ &= \sqrt{\frac{9}{25}\frac{2}{3} - \frac{6}{5}\frac{2}{5} + \frac{2}{7}} = \sqrt{\frac{8}{175}} = \frac{2}{35}\sqrt{14} \end{aligned}$$

Als alternativer Lösungsweg bietet es sich an, mit dem Orthogonalisierungsverfahren aus der Basis $\{p_0.p_1,p_2\}$ eine ONB zu bestimmen, etwa $\{e_0 := \sqrt{\frac{1}{2}}, e_1 := \sqrt{\frac{3}{2}}x, e_2 := \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(x^2-\frac{1}{3})\}$. Dann ist $\Pi(f) = \sum_{i=0}^{2}\langle f,e_i\rangle e_i = \frac{3}{5}x + 1$.

II.3 (4 Punkte)

Es seien V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und Φ ein selbstadjungierter Endomorphismus von V. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(i) Φ hat genau n verschiedene Eigenwerte.

(ii) Je zwei Φ-invariante Untervektorräume U_1 und U_2 von V, die $U_1 \cap U_2 = \{\boldsymbol{o}\}$ erfüllen, sind orthogonal.

Lösung

Beweisrichtung „ $\Rightarrow$ “:

Nach Voraussetzung und dem Spektralsatz hat Φ die n verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und zugehörige eindimensionale Eigenräume $E_{\lambda_1} = [\boldsymbol{b}_1], \ldots, E_{\lambda_n} = [\boldsymbol{b}_n]$, die jeweils paarweise aufeinander senkrecht stehen. Dabei sei $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

Behauptung: Jeder Φ-invarianter Untervektorraum U von V hat die Gestalt

$$U = [\,\boldsymbol{b}_i \,|\, i \in \mathcal{I} \subset \{1, \ldots, n\}].$$

Beweis: Es ist $\Phi|_U : U \to U$ ein selbstadjungierter Endomorphismus von U, der nach dem Spektralsatz eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren besitzt. Diese Eigenvektoren müssen aber gleichzeitig Eigenvektoren von $\Phi : V \to V$ sein, woraus die Behauptung folgt.

Für zwei Φ-invariante Untervektorräume $U_1 = [\,\boldsymbol{b}_i \,|\, i \in \mathcal{I} \subset \{1, \ldots, n\}]$ und $U_2 = [\,\boldsymbol{b}_j \,|\, j \in \mathcal{J} \subset \{1, \ldots, n\}]$ mit $U_1 \cap U_2 = \{\boldsymbol{o}\}$ muss somit $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \emptyset$ gelten. Damit gilt $\boldsymbol{b}_i \perp \boldsymbol{b}_j$ für alle $i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}$ und somit $U_1 \perp U_2$.

Beweisrichtung „ $\Leftarrow$ “:

Da Φ selbstadjungiert ist, ist Φ nach dem Spektralsatz diagonalisierbar.

Angenommen, Φ hätte weniger als n verschiedene Eigenwerte. Dann gäbe es einen Eigenwert λ von Φ, dessen zugehöriger Eigenraum E mindestens zweidimensional wäre. Seien $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ zwei linear unabhängige Eigenvektoren von Φ zu diesem Eigenwert.

Sind $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ nicht orthogonal, so sind auch die Φ-invarianten Räume $U_1 = [\boldsymbol{v}_1]$ und $U_2 = [\boldsymbol{v}_2]$ im Widerspruch zur Behauptung nicht orthogonal.

Sind $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ orthogonal, so gilt $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1 \rangle \neq 0$. Also sind die Φ-invarianten Räume $U_1 = [\boldsymbol{v}_1]$ und $U_2 = [\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2]$ im Widerspruch zur Behauptung nicht orthogonal.

II.4 (4 Punkte)

Im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt, sei bezüglich der nichtorthonormierten Basis $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ mit

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

ein Endomorphismus Φ durch seine Abbildungsmatrix

$$B = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}6-\sqrt{6} & 2+\sqrt{6} & -3\sqrt{6}\\ 2+\sqrt{6} & 6-\sqrt{6} & 3\sqrt{6}\\ 2\sqrt{6} & -2\sqrt{6} & 4+2\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Abbildungsmatrix A von Φ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$, und zeigen Sie, dass Φ eine Isometrie ist.

b) Bestimmen Sie die Normalform $\tilde{A}$ von Φ.

Lösung:

a) Wir führen zunächst den Basiswechsel zur Standardbasis durch. Dabei ist die Übergangsmatrix S bestimmt durch

$$S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \qquad \text{und somit} \qquad S = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Die Abbildungsmatrix A von Φ bezüglich der Standardbasis ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned}
A &= S^{-1}BS\\
&= \frac{1}{16}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6-\sqrt{6} & 2+\sqrt{6} & -3\sqrt{6}\\ 2+\sqrt{6} & 6-\sqrt{6} & 3\sqrt{6}\\ 2\sqrt{6} & -2\sqrt{6} & 4+2\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & \sqrt{6} & 1\\ -\sqrt{6} & 2 & \sqrt{6}\\ 1 & -\sqrt{6} & 3\end{pmatrix}, \text{ woraus } A\cdot A^{\top} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

folgt. Also ist Φ eine Isometrie, da die Abbildungsmatrix von Φ **bezüglich einer ONB** orthogonal ist.

b) Es ist

$$\det A = \left(\frac{1}{4}\right)^3\begin{vmatrix}3 & \sqrt{6} & 1\\ -\sqrt{6} & 2 & \sqrt{6}\\ 1 & -\sqrt{6} & 3\end{vmatrix} = \left(\frac{1}{4}\right)^3\begin{vmatrix}0 & \sqrt{6} & -1\\ 0 & 2 & \sqrt{6}\\ 8 & 0 & 4\end{vmatrix} = \left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot 64 = 1$$

und aus

$$1 + 2\cos\omega = \mathrm{Spur} A = 2 \qquad (\omega\text{: Drehwinkel der Isometrie})$$

folgt

$$\cos\omega = \frac{1}{2}, \ \sin\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \text{also } \omega = \frac{\pi}{3}.$$

Damit sieht die Normalform der Isometrie Φ wie folgt aus:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

II.5 (4 Punkte)

Es sei A eine reguläre komplexe (n,n)-Matrix mit $A^d = E \quad (n, d \geq 1)$. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle := \sum_{k=1}^{d} (A^k \boldsymbol{x})^T \overline{(A^k \boldsymbol{y})}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ definiert wird, für das A die Abbildungsmatrix einer Isometrie bezüglich der Standardbasis ist.

Lösung:

Wir zeigen zunächst, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist.

Es gilt

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{k=1}^{d} \left(A^k \boldsymbol{x}\right)^T \overline{(A^k \boldsymbol{y})} = \sum_{k=1}^{d} \boldsymbol{x}^T \left(\left(A^k\right)^T \overline{A^k}\right) \overline{\boldsymbol{y}} =: \sum_{k=1}^{d} \boldsymbol{x}^T B_k \overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{x}^T \left(\sum_{k=1}^{d} B_k\right) \overline{\boldsymbol{y}}$$

Dabei ist $B_k := \left(A^k\right)^T \overline{A^k}$. Offensichtlich ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt, wenn $B := \sum_{k=1}^{d} B_k$ eine nichttrivale, positiv definite hermitesche Matrix ist.

Zunächst gilt für jedes $k = 1, \ldots n$:

B_k ist positiv definit, weil A und damit A^k regulär ist. Damit gilt für alle $\boldsymbol{o} \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$: $A^k \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$, also $\boldsymbol{x}^T B_k \boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{x}^T (A^k)^T\right) \overline{A^k \boldsymbol{x}} > 0$. Insbesondere ist B_k damit auch nichttrivial.

Außerdem ist B_k hermitesch, denn es ist $\overline{B_k}^T = \left(\overline{(A^k)^T \overline{A^k}}\right)^T = (A^k)^T \overline{A^k} = B_k$.

Damit ist B also Summe von positiv definiten und hermiteschen Matrizen selbst positiv definit (und nichttrivial) und hermitesch, also $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt.

Wir zeigen jetzt, dass für dieses Skalarprodukt $\Phi : \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ eine Isometrie ist.

Aus $A^d = E$ folgt natürlich $A^{d+1} = A$. Dann folgt für alles $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned}
\langle \Phi(\boldsymbol{x}), \Phi(\boldsymbol{y}) \rangle = \langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y} \rangle &= \sum_{k=1}^{d} \left(A^k A\boldsymbol{x}\right)^T \overline{(A^k A\boldsymbol{y})} = \sum_{k=1}^{d} \left(A^{k+1}\boldsymbol{x}\right)^T \overline{(A^{k+1}\boldsymbol{y})} \\
&= \sum_{k=2}^{d} \left(A^k\boldsymbol{x}\right)^T \overline{(A^k\boldsymbol{y})} + \left(\underbrace{A^{d+1}}_{A}\boldsymbol{x}\right)^T \overline{\left(\underbrace{A^{d+1}}_{A}\boldsymbol{y}\right)} \\
&= \sum_{k=1}^{d} \left(A^k\boldsymbol{x}\right)^T \overline{(A^k\boldsymbol{y})} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle
\end{aligned}$$

II.6 (4 Punkte)

Es seien V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Φ ein Endomorphismus von V mit der Eigenschaft

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in V : \langle \boldsymbol{x}, \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle = 0.$$

Zeigen Sie:

a) Ist V ein endlichdimensionaler **euklidischer** Vektorraum, so gilt:

   i) $\Phi^* = -\Phi$. Dabei bezeichnet Φ^* die Adjungierte von Φ.

   ii) Ist U ein Φ-invarianter Untervektorraum von V, so ist auch $U^\perp$ Φ-invariant.

   iii) Wenn Φ einen reellen Eigenwert besitzt, so ist Φ nicht invertierbar.

b) Ist V ein endlichdimensionaler **unitärer** Vektorraum, so ist Φ die Nullabbildung.

Lösung:

a)

i) Es ist $\Phi^* = -\Phi$, genau dann, wenn für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ gilt: $\langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle = -\langle \boldsymbol{x}, \Phi(\boldsymbol{y}) \rangle$. Dies folgt im euklidischen Fall für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ aus

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \rangle = \langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \rangle + \langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \rangle + \langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle + \langle \Phi(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y} \rangle \\ &= \langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle + \langle \Phi(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x} \rangle = \langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \Phi(\boldsymbol{y}) \rangle \end{aligned}$$

ii) Es sei $\boldsymbol{v} \in U^\perp$. Zu zeigen ist, dass $\Phi(\boldsymbol{v}) \in U^\perp$ gilt.

$$\forall\, \boldsymbol{u} \in U : \langle \boldsymbol{u}, \Phi(\boldsymbol{v}) \rangle = -\langle \underbrace{\Phi(\boldsymbol{u})}_{\in U}, \boldsymbol{v} \rangle = 0, \qquad \text{also } \Phi(\boldsymbol{v}) \in U^\perp.$$

iii) Ist λ Eigenwert von Φ und $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ ein zugehöriger Eigenvektor, so gilt

$$0 = \langle \boldsymbol{x}, \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \lambda \boldsymbol{x} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle, \text{ also } \lambda = 0.$$

Damit ist $\mathrm{Kern}\Phi \neq \{\boldsymbol{o}\}$ und Φ nicht invertierbar.

b) Analog zu a)i) gilt auch im unitären Fall

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V : \quad 0 = \langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle + \langle \Phi(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x} \rangle \tag{1}$$

Ersetzt man hier den Vektor $\boldsymbol{x}$ durch $i\,\boldsymbol{x}$ erhält man weiter

$$\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V : 0 = \langle \Phi(i\,\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle + \langle \Phi(\boldsymbol{y}), i\,\boldsymbol{x} \rangle = i(\langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle - \langle \Phi(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x} \rangle)$$

also

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V : \quad 0 = \langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle - \langle \Phi(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x} \rangle \tag{2}$$

Addition von (1) und (2) ergibt

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V : \quad 0 = \langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle.$$

Wählt man $\boldsymbol{y} := \Phi(\boldsymbol{x})$, so ergibt sich

$$\forall \boldsymbol{x} \in V : \quad 0 = \langle \Phi(\boldsymbol{x}), \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle \quad \text{beziehungsweise} \quad \Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}.$$

Damit gleichbedeutend ist, dass Φ die Nullabbildung ist.