I.1 (4 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ eine Abbildung und für $k \in \mathbb{Z}$ sei $M(k)$ die reelle 3×3 – Matrix

$$M(k) := \begin{pmatrix} 1 & k & f(k) \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung f sei so gewählt, dass für $U := \{M(k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ gilt:

$$\forall k, l \in \mathbb{Z} : M(k) \cdot M(l) \in U.$$

Dabei wird die übliche Matrizenmultiplikation benützt.
Zeigen Sie:
a) Die Abbildung f besitzt die folgenden Eigenschaften:
$\forall k, l \in \mathbb{Z} : f(k+l) = f(k) + f(l) + kl.$
$f(0) = 0.$
$\forall k \in \mathbb{Z} : f(-k) = -f(k) + k^2.$
b) U ist bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe.

Lösung:

a) Laut Voraussetzung gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & k+l & f(k)+f(l)+kl \\ 0 & 1 & k+l \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(k)M(l) \in U.$$

Da die Matrix $M(k+l)$ die einzige Matrix in U ist, die als zweiten Eintrag in der ersten Zeile die Zahl $k+l$ hat, folgt $M(k)M(l) = M(k+l)$ und damit durch Vergleich des dritten Eintrags der ersten Zeile die gewünschte Gleichung

$$f(k+l) = f(k) + f(l) + kl.$$

Daraus ergibt sich

$$f(0) = f(0+0) = 2f(0) + 0, \quad \text{also} \quad f(0) = 2f(0),$$

was $f(0) = 0$ erzwingt.
Schließlich ist

$$0 = f(0) = f(k + (-k)) = f(k) + f(-k) - k^2,$$

und das ist die verlangte Gleichung.

b) Hierzu gibt es (mindestens) zwei Möglichkeiten.

1. Möglichkeit: Die Abbildung $k \mapsto M(k)$ ist ein Homomorphismus von $\mathbb{Z}$ in die Gruppe der reellen invertierbaren 3×3 – Matrizen, und U ist als das Bild dieser Abbildung eine Untergruppe der Matrizengruppe.

2. Möglichkeit: U ist nichtleere Teilmenge der invertierbaren reellen 3×3 – Matrizen, und für $M(k), M(l) \in U$ ist auch $M(k)M(l)^{-1} = M(k)M(-l) = M(k-l)$ in U. Nun kann man das Untergruppenkriterium anwenden.

I.2 (4 Punkte)

Es sei $B := \{b_1, \ldots, b_5\}$ Basis des reellen Vektorraums V und Φ der Endomorphismus von V, der durch folgende Vorschrift gegeben ist:

$$\begin{array}{rrrrrr}
\Phi(b_1) := & 2b_1 & & & +3b_4 & \\
\Phi(b_2) := & -b_1 & +b_2 & +3b_3 & & -2b_5 \\
\Phi(b_3) := & -b_1 & & +2b_3 & -4b_4 & \\
\Phi(b_4) := & b_1 & & -2b_3 & & \\
\Phi(b_5) := & -3b_1 & -2b_2 & & +2b_4 & +4b_5
\end{array}$$

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich B.
b) Zeigen Sie, dass die Vektoren $c_1 := b_1 + b_3 + b_4$, $c_2 := b_1 - b_3$ und $c_3 := b_1 + b_4$ linear unabhängig sind.
c) Zeigen Sie, dass der von $C := \{c_1, c_2, c_3\}$ aufgespannte Untervektorraum U unter Φ invariant ist.
d) Geben Sie die Matrix an, die $\Phi|_U : U \longrightarrow U$ bezüglich C beschreibt.

Lösung:

a) Die Matrix ist

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Es seien Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gegeben, für die $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 = 0$ gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned} \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 &= \lambda_1(b_1 + b_3 + b_4) + \lambda_2(b_1 - b_3) + \lambda_3(b_1 + b_4) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)b_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)b_3 + (\lambda_1 + \lambda_3)b_4 = 0 \end{aligned}$$

Da die b_i linear unabhängig sind erzwingt dies

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = (\lambda_1 - \lambda_2) = (\lambda_1 + \lambda_3) = 0,$$

also $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3 = \ldots = 0$, und die c_i sind linear unabhängig.

c) Da die drei Vektoren c_1, c_2, c_3 linear unabhängig sind und in dem von b_1, b_3 und b_4 erzeugten Vektorraum liegen, ist $\{b_1, b_3, b_4\}$ ebenfalls eine Basis von U. Offensichtlich sind $\Phi(b_1), \Phi(b_3)$ und $\Phi(b_4)$ wieder Linearkombinationen von b_1, b_3 und b_4 und somit in U. Also ist U unter Φ invariant.

d) Bezüglich $\{b_1, b_3, b_4\}$ beschreibt sich $\Phi|_U$ durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Basiswechsel zur Basis C liefert die darstellende Matrix $S^{-1}AS$, wobei S die Basiswechslematrix von $\{b_1, b_3, b_4\}$ zu C ist. Also:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -4 & 13 & 5 \end{pmatrix}.$$

I.3 (4 Punkte)

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Zeigen Sie, dass $U := \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid AX = XB\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist.

b) Nun seien spezieller $A = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_4 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_4 \end{smallmatrix}\right)$. Weisen Sie nach, dass es genau dann eine von der Nullmatrix verschiedene Lösung $X = \left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{smallmatrix}\right)$ der Gleichung

$$AX = XB$$

gibt, wenn $\{a_1, a_4\} \cap \{b_1, b_4\} \neq \emptyset$ gilt.

Lösung:

a) Es gilt $0 \in U$, und mit $X, Y \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$A(\lambda X + Y) = \lambda AX + AY = \lambda XB + YB = (\lambda X + Y)B.$$

Also liegt auch $\lambda X + Y$ in U, und U ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

b) Es gilt

$$AX = \begin{pmatrix} a_1x_1 & a_1x_2 \\ a_3x_1 + a_4x_3 & a_3x_2 + a_4x_4 \end{pmatrix}, \quad XB = \begin{pmatrix} x_1b_1 & x_1b_2 + x_2b_4 \\ x_3b_1 & x_3b_2 + x_4b_4 \end{pmatrix}.$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich, dass $AX = XB$ zu dem folgenden LGS für die Koeffizienten $x_1, \ldots, x_4$ äquivalent ist:

$$\begin{array}{rrrrl} (a_1 - b_1)\ x_1 & & & & = 0 \\ -b_2\ x_1 & +(a_1 - b_4)\ x_2 & & & = 0 \\ a_3\ x_1 & & +(a_4 - b_1)\ x_3 & & = 0 \\ & a_3\ x_2 & -b_2\ x_3 & +(a_4 - b_4)\ x_4 & = 0 \end{array}$$

Dieses System hat genau dann eine von Null verschiedene Lösung, wenn seine Koeffizientenmatrix Determinante 0 hat. Diese Determinante ist aber

$$\prod_{i,j \in \{1,4\}} (a_i - b_j),$$

wird also Null genau dann, wenn einer der Faktoren Null ist, so wie es zu beweisen war.

I.4 (4 Punkte)

Es seien Φ ein Endomorphismus des endlichdimensionalen K-Vektorraumes V, λ ein Eigenwert von Φ, und U der Eigenraum zu λ. Schließlich sei $\Psi : V/U \longrightarrow V/U$ die durch Φ induzierte Abbildung, das heißt

$$\Psi(x+U) = \Phi(x) + U.$$

Zeigen Sie:
a) Ist Φ diagonalisierbar, so auch Ψ.
b) Die Umkehrung von a) gilt nicht.
(Tipp: Betrachten Sie zum Beispiel die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.)

Lösung:

a) Es sei $\{v_1, \dots, v_d\}$ eine Basis von V aus Eigenvektoren, die so nummeriert werden, dass genau die letzten e Vektoren Eigenvektoren zum gegebenen Eigenwert λ sind, also eine Basis von U bilden. Die Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_{d-e}$ seien die Eigenwerte zu den anderen Basisvektoren, das heißt:

$$\Phi(v_i) = \lambda_i v_i \quad (1 \le i \le d-e).$$

Bekanntlich ist $B = \{v_i + U \mid 1 \le i \le d-e\}$ eine Basis von V/U, denn die entsprechenden v_is sind Basis eines Vektorraumkomplements von U.
Es gilt nun für $1 \le i \le d-e$:

$$\Psi(v_i + U) = \Phi(v_i) + U = \lambda_i v_i + U = \lambda_i(v_i + U),$$

also ist $v_i + U$ ein Eigenvektor von Ψ zum Eigenwert λ_i, und B ist eine Basis von V/U aus Eigenvektoren von Ψ. Die Existenz solch einer Basis ist aber gerade ein Kriterium für die Diagonalisierbarkeit.

b) Es sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die durch Multiplikation mit $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gegeben wird. Der einzige Eigenvektor von Φ ist 1, aber Φ ist nicht diagonalisierbar, da der Eigenraum von Φ zum Eigenwert 1 nur eindimensional ist, also keine Basis von $\mathbb{R}^2$ enthalten kann.
Andererseits ist für den Eigenwert $\lambda = 1$ der Eigenraum U eindimensional und damit auch der Quotient $\mathbb{R}^2/U$ eindimensional, also die induzierte Abbildung Ψ diagonalisierbar. Also kann von der Diagonalisierbarkeit von Ψ nicht auf die von Φ geschlossen werden.

I.5 (4 Punkte)

Es seien V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\Phi \in \mathrm{End}(V)$ mit $\Phi^4 = \mathrm{Id}_V$. Zeigen Sie:

a) Für das Polynom $P = X^4 - 1$ ist $P(\Phi)$ die Nullabbildung. Die Eigenwerte von Φ liegen alle in $\{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$.

b) Φ ist diagonalisierbar.

c) Ist 1 ein Eigenwert von Φ, so ist der Endomorphismus $\Pi := \frac{1}{4}(\mathrm{Id}_V + \Phi + \Phi^2 + \Phi^3)$ eine Projektion auf den Eigenraum von Φ zum Eigenwert 1.

Lösung:

a) Es ist $P(\Phi) = \Phi^4 - \Phi^0 = \Phi^4 - \mathrm{Id}_V = 0$ nach Voraussetzung. Ist λ ein Eigenwert von Φ, so ist $P(\lambda)$ ein Eigenwert von $P(\Phi)$, also 0, da die Nullabbildung nur 0 als Eigenwert hat. Die einzigen komplexen Nullstellen von P sind aber gerade die angebenen Zahlen $1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$.

b) Das Minimalpolynom von Φ ist nach Teil a) ein Teiler von P. Da

$$P = (X-1)(X+1)(X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i})$$

Produkt paarweise verschiedener Linearfaktoren ist, zerfällt auch das Minimalpoynom von Φ in paarweise verschiedene Linearfaktoren. Damit ist Φ diagonalisierbar.

c) Es sei $\{v_1, \ldots, v_d\}$ eine Basis aus Eigenvektoren von Φ. Es sei $\lambda_k \in \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\}$ der Eigenwert zu v_k. Dann gilt

$$\Pi(v_k) = \frac{1}{4}(1 + \lambda_k + \lambda_k^2 + \lambda_k^3) v_k = \begin{cases} v_k, & \text{falls } \lambda_k = 1, \\ 0, & \text{falls } \lambda_k \neq 1. \end{cases}$$

Π ist damit diagonalisierbar mit Eigenwerten $\in \{0, 1\}$, also eine Projektion. Das Bild von Π ist genau der Eigenraum von Φ zum Eigenwert 1.

I.6 (4 Punkte)

Für welche $n \in \mathbb{N}$ hat das reelle Polynom

$$p(x) := \det \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} & x^n \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \dots & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

den Grad n?

Lösung:

Laplace-Entwicklung nach der ersten Zeile zeigt, dass der Koeffizient, der in $p(x)$ bei x^n steht, gleich $(-1)^{n+1}$ mal der Determinante der folgenden $n \times n$ – Matrix ist:

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ -1 & \dots & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Das Polynom hat also genau dann Grad n, wenn diese Determinante von Null verschieden ist.
Subtraktion der vorletzten Spalte von der letzten und der drittletzten von der vorletzten liefert

$$\det(A_n) = \det \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & A_{n-2} & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ & A_{n-2} & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \dots & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei wurde die letzte Zeile von der vorletzten abgezogen. Nun folgt

$$\det(A_n) = \det \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & A_{n-2} & & \vdots \\ & & & 0 \\ & & & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(A_{n-2}),$$

wobei zuerst nach der letzten Spalte und dann nach der letzten Zeile entwickelt wurde.
Die Werte $\det(A_1) = 0$ sowie $\det(A_2) = 1$ implizieren nun, dass $p(x)$ genau dann Grad n hat, wenn n gerade ist.

II.1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrix

$$M_a := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & a & -a & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Das charakteristische Polynom von M_a ergibt sich als

$$\begin{aligned} f_a &= \det \begin{pmatrix} X+1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & X-a & a & -2 \\ -1 & 0 & X-1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & X+1 \end{pmatrix} = (X-a) \det \begin{pmatrix} X+1 & 1 & 0 \\ -1 & X-1 & -1 \\ 0 & -1 & X+1 \end{pmatrix} \\ &= (X-a)(X+1)^2(X-1). \end{aligned}$$

Die Eigenwert sind also a und ± 1. Wir berechnen zuerst die Dimension des Eigenraumes zum Eigenwert -1 über den folgenden Rang:

$$\operatorname{Rang}(M_a + \mathrm{Id}) = \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & a+1 & -a & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 + \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Also ist dieser Eigenraum immer eindimensional. Analog ist auch der Eigenraum zum Eigenwert 1 immer eindimensional, und für jeden Eigenwert gibt es genau ein Jordankästchen. Damit hat man die folgenden Jordanschen Normalformen:

$$a \neq \pm 1 : \quad \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & & & \\ \hline & -1 & 0 & \\ & 1 & -1 & \\ \hline & & & a \end{array}\right)$$

$$a = 1 : \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & \\ 1 & 1 & & \\ \hline & & -1 & 0 \\ & & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$a = -1 : \quad \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & -1 & 0 \\ & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

II.2 (4 Punkte)

Es sei V der Vektorraum der schiefsymmetrischen reellen 3×3 – Matrizen, das heißt

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Auf $V \times V$ sei die Bilinearform

$$\langle .,. \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \langle A, B \rangle := -\mathrm{Spur}(AB)$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass $\langle .,. \rangle$ ein Skalarprodukt auf V ist.

b) Es sei U der Untervektorraum von V, der von den Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U bezüglich $\langle .,. \rangle$.

Lösung:

a) Es ist noch nachzuweisen, dass $\langle .,. \rangle$ symmetrisch und positiv definit ist.
Die Symmetrie folgt sofort aus der Tatsache, dass für zwei beliebige Matrizen A, B stets $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$ gilt.
Die positive Definitheit folgt, da für $A \in V, A \neq 0$, stets gilt:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle A, A \rangle = 2(a^2 + b^2 + c^2) > 0.$$

b) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\langle A, A \rangle = 4, \langle A, B \rangle = 8$. Daher ist nach E. Schmidt der Vektor

$$\tilde{B} := B - \frac{\langle A, B \rangle}{\langle A, A \rangle} A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

zu A senkrecht, und auch A und $\tilde{B}$ erzeugen U. Weiter gilt $\langle \tilde{B}, \tilde{B} \rangle = 36$. Also ist $\{\frac{1}{2}A, \frac{1}{6}\tilde{B}\}$ eine Orthonormalbasis von U.

II.3 (4 Punkte)

Es seien V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$, Φ ein Endomorphismus von V und Φ^* der dazu adjungierte Endomorphismus.
Zeigen Sie:

a) $\big(\mathrm{Bild}(\Phi)\big)^\perp = \mathrm{Kern}(\Phi^*)$.

b) Falls Φ^2 die Nullabbildung ist, so gilt $\mathrm{Bild}(\Phi) \subset \mathrm{Kern}(\Phi)$ und

$$\dim\big(\mathrm{Kern}(\Phi)\big) - \dim\big(\mathrm{Bild}(\Phi)\big) = \dim\Big(\mathrm{Kern}(\Phi) \cap \mathrm{Kern}(\Phi^*)\Big).$$

Lösung:

a) "$\big(\mathrm{Bild}(\Phi)\big)^\perp \subseteq \mathrm{Kern}(\Phi^*)$":
Es sei $v \in \big(\mathrm{Bild}(\Phi)\big)^\perp$, das heißt: für jedes $w \in V$ gilt

$$\langle \Phi(w), v \rangle = 0.$$

Aus der Definition von Φ^* folgt aber, dass die linke Seite dieser Gleichung gerade gleich $\langle w, \Phi^*(v) \rangle$ ist, also steht $\Phi^*(v)$ aus jedem Element von V senkrecht, ist also der Nullvektor. Damit ist $v \in \mathrm{Kern}(\Phi^*)$.

"$\big(\mathrm{Bild}(\Phi)\big)^\perp \supseteq \mathrm{Kern}(\Phi^*)$":
Ist $v \in \mathrm{Kern}(\Phi^*)$, so gilt für alle $w \in V$:

$$0 = \langle w, 0 \rangle = \langle w, \Phi^*(v) \rangle = \langle \Phi(w), v \rangle,$$

also steht v auf allen Vektoren der Form $\Phi(w)$ senkrecht, und damit ist $v \in \big(\mathrm{Bild}(\Phi)\big)^\perp$.
b) Aus $\Phi^2 = 0$ folgt für alle $v \in V : \Phi^2(v) = \Phi(\Phi(v)) = 0$, also $\Phi(v) \in \mathrm{Kern}(\Phi)$, und damit $\mathrm{Bild}(\Phi) \subset \mathrm{Kern}(\Phi)$.
Nun lässt sich nach Teil a) jeder Vektor $v \in V$ auf eindeutige Art schreiben als

$$v = v_1 + v_2, \quad v_1 \in \mathrm{Bild}(\Phi), \; v_2 \in \mathrm{Kern}(\Phi^*).$$

Liegt v hierbei im Kern von Φ, so muss dies auch v_2 tun, da ja auch v_1 im Kern von Φ liegt. Also ist $\Big(\mathrm{Kern}(\Phi) \cap \mathrm{Kern}(\Phi^*)\Big)$ ein Vektorraumkomplement zum Bild von Φ im Kern von Φ, und die behauptete Gleichheit der Dimensionen folgt aus der Dimensionsformel.

II.4 (4 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und Φ ein Automorphismus von V mit folgenden Eigenschaften:

i) $\forall x, y \in V : x \perp y \Rightarrow \Phi(x) \perp \Phi(y)$.

ii) $\exists a \in V : ||\Phi(a)|| = ||a|| = 1$.

Zeigen Sie, dass Φ eine Isometrie von V ist.

Lösung:

Um zu zeigen, dass Φ eine Isometrie ist, weisen wir nach, dass es eine Orthonormalbasis von V gibt, die unter Φ wieder auf eine Orthonormalbasis abgebildet wird.
Dazu wählen wir eine Orthonormalbasis $\{v_1, \ldots, v_d\}$ von V, für die $v_1 = a$ gilt. Das geht, da a normiert ist und jede Basis, die a als ersten Vektor enthält mit E. Schmidt zu einer Orthonormalbasis gemacht werden kann, die a als ersten Vektor enthält.
Die Bedingung i) impliziert, dass die Menge $\{\Phi(v_1), \ldots, \Phi(v_d)\}$ aus paarweise orthogonalen Vektoren besteht. Nun ist noch nachzuweisen, dass alle diese Vektoren normiert sind. Für $\Phi(v_1)$ folgt dies aus ii), da $v_1 = a$.
Sei also $2 \leq i \leq d$. Dann gilt $(v_1 - v_i) \perp (v_1 + v_i)$, und damit nach i) auch

$$\Phi(v_1 - v_i) \perp \Phi(v_1 + v_i).$$

Drückt man diese Orthogonalität mit dem Skalarprodukt aus, so heißt das:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Phi(v_1 - v_i), \Phi(v_1 + v_i) \rangle = \langle \Phi(v_1) - \Phi(v_i), \Phi(v_1) + \Phi(v_i) \rangle = \\ &= \langle \Phi(v_1), \Phi(v_1) \rangle + \langle -\Phi(v_i), \Phi(v_1) \rangle + \langle \Phi(v_1), \Phi(v_i) \rangle + \langle -\Phi(v_i), \Phi(v_i) \rangle \\ &= \langle \Phi(v_1), \Phi(v_1) \rangle - \langle \Phi(v_i), \Phi(v_i) \rangle. \end{aligned}$$

Demnach hat $\Phi(v_i)$ dieselbe Norm wie $\Phi(v_1)$, also ist auch $\Phi(v_i)$ normiert, wie zu zeigen war.

II.5 (4 Punkte)

Es sei $\Phi : V \longrightarrow V$ ein selbstadjungierter Endomorphismus des endlichdimensionalen unitären Vektorraumes V. Zeigen Sie:

a) Der Endomorphismus $\mathrm{Id}_V - \mathrm{i}\Phi$ invertierbar.

b) $(\mathrm{Id}_V + \mathrm{i}\Phi) \circ (\mathrm{Id}_V - \mathrm{i}\Phi)^{-1}$ ist eine Isometrie von V.

Lösung:

a) Wäre $\mathrm{Id}_V - \mathrm{i}\Phi$ nicht invertierbar, so gäbe es einen von Null verschiedenen Vektor v im Kern. Für diesen folgte dann:

$$0 = (\mathrm{Id}_V - \mathrm{i}\Phi)(v) = v - \mathrm{i}\Phi(v) = \mathrm{i}(-\mathrm{i}v - \Phi(v)),$$

also ist $\Phi(v) = -\mathrm{i}v$, und $-\mathrm{i}$ wäre ein Eigenwert von Φ. Da Φ aber selbstadjungiert ist, sind alle Eigenwerte reell, also ungleich $-\mathrm{i}$.

b) Wir verwenden noch einmal, dass Φ selbstadjungiert ist, und wählen eine Orthonormalbasis $B = \{v_1, \ldots, v_d\}$ von V, die aus Eigenvektoren von Φ besteht. Es gilt

$$\Phi(v_k) = \lambda_k v_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

B ist auch eine Basis aus Eigenvektoren für $(\mathrm{Id}_V + \mathrm{i}\Phi)$ und $(\mathrm{Id}_V - \mathrm{i}\Phi)$, es gilt jeweils

$$(\mathrm{Id}_V \pm \mathrm{i}\Phi)(v_k) = (1 \pm \lambda_k \mathrm{i})v_k.$$

Auch für $(\mathrm{Id}_V - \mathrm{i}\Phi)^{-1}$ ist B eine Eigenbasis:

$$(\mathrm{Id}_V - \mathrm{i}\Phi)^{-1}(v_k) = (1 - \lambda_k \mathrm{i})^{-1} v_k.$$

Daraus folgt, dass B auch eine Eigenbasis für $(\mathrm{Id}_V + \mathrm{i}\Phi) \circ (\mathrm{Id}_V - \mathrm{i}\Phi)^{-1}$ ist, und dass gilt

$$(\mathrm{Id}_V + \mathrm{i}\Phi) \circ (\mathrm{Id}_V - \mathrm{i}\Phi)^{-1}(v_k) = \frac{1 + \lambda_k \mathrm{i}}{1 - \lambda_k \mathrm{i}} v_k.$$

Die Eigenwerte von $(\mathrm{Id}_V + \mathrm{i}\Phi) \circ (\mathrm{Id}_V - \mathrm{i}\Phi)^{-1}$ haben also alle Betrag 1, und da die Eigenvektoren eine Orthonormalbasis bilden, ist der untersuchte Endomorphismus eine Isometrie.

II.6 (4 Punkte)

Auf $V = \mathbb{R}^3$ sei die folgende quadratische Form q gegeben:

$$q : V \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto -(x_1^2 + x_2^2) + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 6(x_1 + x_2)x_3.$$

Weiter sei $s : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ die symmetrische Bilinearform, die q als quadratische Form hat.

a) Geben Sie die Matrix an, die s bezüglich der Standardbasis beschreibt.

b) Bestimmen Sie eine Basis B von V, bezüglich der die Form s durch eine Diagonalmatrix mit Einträgen in $\{-1, 0, 1\}$ beschrieben wird.

Lösung:

a) Die Matrix lautet

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Zunächst berechnen wir das charakteristische Polynom von A:

$$\det(X\mathrm{Id} - A) = (X + 2)(X + 3)(X - 6).$$

Nun brauchen wir Eigenvektoren für A. Eigenvektoren für die Eigenwerte $-2, -3$ und 6 sind in dieser Reihenfolge

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich dieser Basis beschreibt sich s durch die Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(-4, -9, 36)$, und daher beschreibt sich s bezüglich der Basis $\{\frac{1}{2}v_1, \frac{1}{3}v_2, \frac{1}{6}v_3\}$ durch die Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(-1, -1, 1)$.