Aufgabe I.1 (4 Punkte)

Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e und $M = \{x \in G \,|\, x \circ x = e\}$.

Zeigen Sie:

a) Ist G kommutativ, so ist M eine Untergruppe von G.

b) Ist $n \geq 3$ und G die symmetrische Gruppe S_n, so ist M keine Untergruppe von G.

Lösung:
Laut Vorlesung ist notwendig und hinreichend dafür, dass M Untergruppe ist (Untergruppenkriterium)
(i) $M \neq \emptyset$,
(ii) M ist abgeschlossen bei Inversion,
(iii) M ist bei der Verknüpfung abgeschlossen.

a)
Zu (i) Wegen $e \circ e = e$ ist $e \in M$.
Zu (ii) Weil für x in M gilt $x \circ x = e$ ist $x^{-1} = x$, also $x^{-1} \in M$.
Zu (iii) Für $x, y \in M$ ist $x \circ x = e$ und $y \circ y = e$, daher mit Benützung der Kommutativität: $x \circ y \circ x \circ y = x \circ x \circ y \circ y = e \circ e = e$. Demnach ist $x \circ y \in M$.

b)
Sein $n \geq 3$. Dann enthält S_n die Transpositionen
τ: Vertauschung von 1 und 2
ρ: Vertauschung von 2 und 3.
Offenbar ist $\tau \in M$ und $\rho \in M$, da $\tau \circ \tau = \mathrm{id} = e$ und $\rho \circ \rho = \mathrm{id}$ ist. $\sigma := \rho \circ \tau \circ \rho \circ \tau$ ist aber $\neq \mathrm{id} = e$, weil $\sigma(1) = 2$ ist. Daher ist (iii) im Kriterium verletzt und M keine Untergruppe.

Alternative Lösung (fast ohne Rechnung bei etwas mehr theoretischen Kenntnissen):

a) Bei kommutativem G ist die Abbildung $f : G \to G,\ x \mapsto x \circ x$ ein Homomorphismus (wegen $f(x \circ y) = x \circ y \circ x \circ y = x \circ x \circ y \circ y = f(x) \circ f(y)$). $M = \mathrm{Kern} f$ ist dann bekanntlich eine Untergruppe.
b) Jede Permutation kann man als als Produkt von Transpositionen schreiben (Vorl.) Diese liegen in M, aber z.B. ein Dreierzyklus nicht. Also ist M keine Untergruppe.

Aufgabe I.2 (4 Punkte)

a) Es seien Φ und Ψ zwei Endomorphismen eines $\mathbb{K}$ - Vektorraums V und $c \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass $U_c := \{x \in V \mid \Phi(x) = c\Psi(x)\}$ ein Untervektorraum von V ist.

b) Seien nun speziell $\mathbb{K} = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^3$ und die Endomorphismen Φ, Ψ durch die Abbildungsmatrizen A, B bezüglich der Standardbasis gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle $c \in \mathbb{R}$ mit $U_c \neq \{0\}$ und die zugehörigen Untervektorräume U_c.

Lösung:

a) Es wird das UVR-Kriterium angewendet: Sei V Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $U \subset V$.
Es ist U UVR von V $\Leftrightarrow$ i) $U \neq \emptyset$ und ii) $x, y \in U, a \in \mathbb{K} \Rightarrow x + ay \in U$.

zu i) Sei o der Nullvektor in V, dann gilt: $\Phi(o) = o = c\Psi(o) \Rightarrow o \in U_c \Rightarrow U_c \neq \emptyset$

zu ii) Seien $x, y \in U_c, a, b \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\Phi(ax + by) \overset{\Phi \text{ End.}}{=} a\Phi(x) + b\Phi(y) \overset{x,y \in U_c}{=} ac\Psi(x) + bc\Psi(y) \overset{\Psi \text{ End.}}{=} c\Psi(ax + by)$$

Also ist $ax + by \in U_c$.

Damit ist U_c UVR von V und Teil a) gezeigt.

b) Es gilt: $x \in U_c \Leftrightarrow Ax = cBx \Leftrightarrow (A - cB)x = o$.
U_c ist also Lösungsmenge des homogenen LGS $(A - cB)x = o$, d.h.:

$$U_c \neq \{o\} \Leftrightarrow \operatorname{Rg}(A - cB) < 3 \Leftrightarrow \det(A - cB) = 0$$

Die Determinante kann mit Hilfe des Entwicklungssatzes berechnet werden:

$$\det(A - cB) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2c \\ 0 & 1-c & 0 \\ -c & 0 & 2 \end{pmatrix} = (1 - c) \det \begin{pmatrix} 1 & -2c \\ -c & 2 \end{pmatrix} = 2(1 - c)^2(1 + c)$$

Also ist $U_c \neq \{o\}$ genau dann, wenn $c \in \{-1, 1\}$ ist. Berechnen wir die zugehörigen Untervektorräume:

$$c = 1: \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow U_1 = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$c = -1: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U_{-1} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

Aufgabe I.3 (4 Punkte)

Im Vektorraum V der reellen Polynome des Grades ≤ 4 sei der Untervektorraum U erzeugt von den vier Polynomen

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} p_1 & = & 1 & + & 2x & - & x^2 & + & x^3 & - & x^4 \\ p_2 & = & 2 & - & 2x & + & x^2 & - & 2x^3 & & \\ p_3 & = & 1 & + & 2x & - & x^2 & - & x^3 & - & 2x^4 \\ p_4 & = & & - & 6x & + & 3x^2 & - & 2x^3 & + & 3x^4 \end{array} .$$

a) Bestimmen Sie $\dim U$ und einen Untervektorraum W_1 von V mit $U \oplus W_1 = V$.

b) Geben Sie eine Basis des Faktorraums V/U an.

c) Bestimmen Sie einen weiteren Untervektorraum W_2 von V so, dass $U \oplus W_2 = V$ gilt und außerdem $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ ist.

Lösung:
a) Wir bestimmen die Dimension von U. Dazu schreiben wir die Koordinatenvektoren (bzgl. der Standardbasis $(1, x, x^2, x^3, x^4)$) der erzeugenden Vektoren von U zeilenweise in eine Matrix und bestimmen deren Rang:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Rang dieser Matrix ist 3, also gilt $\dim U = 3$. Da die **Zeilenumformungen** das Erzeugnis nicht ändern, stehen in den Zeilen Koordinatenvektoren von linear unabhängigen erzeugenden Vektoren von U. Damit wäre eine Basis B von U etwa

$$B = (q_1 := 1 + 2x - x^2 + x^3 - x^4, q_2 := -6x + 3x^2 - 4x^3 + 2x^4, q_3 := 2x^3 + x^4).$$

Die Gaußsche Stufenform der Koordinatenmatrix lässt sich durch die Zeilen $(0, 0, 1, 0, 0)$ und $(0, 0, 0, 0, 1)$ (Man beachte die Stufen in der Gaußform!) zu einer regulären quadratischen Matrix ergänzen. Diese sind Koordinatenvektoren der Vektoren $q_4 := x^2$ und $q_5 := x^4$, die damit B zu einer Basis von V ergänzen. Eine mögliche Wahl von W_1 wäre deshalb

$$W_1 := [q_4, q_5] = [x^2, x^4] .$$

b) Nach Vorlesung bilden $(q_4 + U, q_5 + U) = (x^2 + U, x^4 + U)$ eine Basis des Faktorraums V/U.

c) Eine weitere Möglichkeit, die Basis B zu einer Basis von V zu ergänzen, wäre etwa $q_4' := x$, $q_5' = x^3$. Denn die Koordinatenvektoren von $(q_1, q_4', q_2, q_5', q_3)$ bilden eine quadratische Matrix, die vollen Rang hat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\{q_4, q_5, q_4', q_5'\}$ gilt $[q_4', q_5'] \cap W_1 = \{0\}$, weshalb $W_2 := [q_4', q_5'] = [x, x^3]$ gewählt werden kann.

Aufgabe I.4 (4 Punkte)

Es seien V ein $n-$dimensionaler $\mathbb{K}-$Vektorraum und $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ Linearformen auf V.
Zeigen Sie:

$\Phi_1, \dots, \Phi_n$ sind genau dann linear abhängig, wenn für alle $x_1, \dots, x_n \in V$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} \Phi_1(x_1) & \cdots & \Phi_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi_1(x_n) & \cdots & \Phi_n(x_n) \end{pmatrix} = 0.$$

Lösung:
Seien die $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ linear abhängig. Dann gibt es $a_1, \dots, a_n$ aus $\mathbb{K}$, nicht alle Null, sodass $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \Phi_i = 0$ gilt. Das bedeutet, dass für beliebige Vektoren $x_1, \dots, x_n$ gilt

$$a_1\Phi_1(x_k) + \cdots + a_n\Phi_n(x_k) = 0 \text{ für } k = 1, \dots, n.$$

In Matrizenform heißt das

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Phi_1(x_1) & \cdots & \Phi_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi_1(x_n) & \cdots & \Phi_n(x_n) \end{pmatrix}}_{:=A} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist $(a_1, \dots, a_n)^T$ eine nichttriviale Lösung des Gleichungssystems $Ay = 0$. Das wiederum bedeutet, dass A nicht vollen Rang hat bzw. $detA = 0$.

Verschwindet umgekehrt die Determinante, so bedeutet das, dass das LGS $Ay = 0$ eine nichttriviale Lösung $(a_1, \dots, a_n)^T$ besitzt. Dann gilt für n beliebige Vektoren $x_1, \dots, x_n \in V$:

$$a_1\Phi_1(x_k) + \cdots + a_n\Phi_n(x_k) = \underbrace{(a_1\Phi_1 + \cdots + a_n\Phi_n)}_{=:\Psi}(x_k) = 0 \text{ für } k = 1, \dots, n$$

Setzt man für $x_1, \dots, x_n$ eine Basis ein, so bildet Ψ alle Basisvektoren auf den Nullvektor ab, weshalb Ψ die Nullabbildung ist. Damit ist $a_1\Phi_1 + \cdots + a_n\Phi_n$ eine nichttriviale Darstellung der Nullabbildung und $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ sind linear abhängig.

Aufgabe I.5 (4 Punkte)

Es seien V ein n-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und Φ ein Endomorphismus von V. Weiter sei $p \in \mathbb{K}[x]$ ein Polynom.
Zeigen Sie:

a) Gilt $p(\Phi) = \mathrm{id}_V$, so ist $p(c) = 1$ für alle Eigenwerte c von Φ.

b) Ist Φ diagonalisierbar und gilt $p(c) = 1$ für alle Eigenwerte c von Φ, so ist $p(\Phi) = \mathrm{id}_V$.

Lösung:
a) Sei $p = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k$. Zu jedem Eigenwert c von Φ gibt es einen Vektor $y \neq 0$ mit $\Phi(y) = cy$. Dann gilt für alle $i = 1, 2, \ldots : \Phi^i(y) = c^i y$. Daraus folgt $p(\Phi)(y) = a_0 y + a_1 cy + \ldots + a_k c^k y = p(c)y$. Wegen $p(\Phi) = \mathrm{id}_V$ und $y \neq o$ gilt $p(c) = 1$.

b) Ist Φ diagonalisierbar, so existiert eine Basis $(y_1, \ldots, y_n)$ aus Eigenvektoren von $\Phi : \Phi(y_i) = c_i y_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt wieder $p(\Phi)(y_i) = p(c_i) y_i$, also $p(\Phi)(y_i) = y_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Damit folgt $p(\Phi) = \mathrm{id}_V$ wie behauptet.

Alternative Lösung:
a) Wegen $p(\Phi) - \mathrm{id}_V = O$ ist p - 1 ein annullierendes Polynom von Φ. Das Minimalpolynom m von Φ ist also ein Teiler von $p - 1$, d.h. $p - 1 = sm$ mit $s \in \mathbb{K}[x]$. Weil jeder Eigenwert c von Φ Nullstelle von m ist, gilt $p(c) - 1 = 0$.

b) Weil Φ diagonalisierbar ist, zerfällt das Minimalpolynom m in einfache Linearfaktoren der Form $x - c$. Weil die Eigenwerte c nach Voraussetzung auch Nullstellen von $p - 1$ sind, lassen sich die Linearfaktoren $x - c$ auch bei $p - 1$ abspalten, d.h. m ist Teiler von $p - 1$. Daraus folgt $p(\Phi) - \mathrm{id}_V = O$.

Aufgabe I.6 (4 Punkte)

Berechnen Sie für natürliches $n \geq 1$ die Determinanten der reellen $(n,n)-$Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{pmatrix}$$

und

$$B = (\!(b_{ij})\!)\,, \text{ wobei } b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i = j, \\ 1 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Lösung:

Die Determinante einer (quadratischen) Matrix ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile (oder einer Spalte) ein Vielfaches einer anderen Zeile (bzw. Spalte) addiert.

Man kann deshalb die erste Zeile von A von allen anderen Zeilen abziehen und erhält

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Als nächstes addiert man zur ersten Spalte alle anderen Spalten und erhält:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1+a_1+a_2+\cdots+a_n & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rechts steht nun eine obere Dreiecksmatrix; deren Determinante ist das Produkt der Diagonalelemente, also

$$\det(A) = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Setzt man in der Matrix A speziell $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = -1$, so erhält man die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix} = -B$$

Also ist $\det(-B) = 1 + \sum_{i=1}^{n} -1 = 1 - n$ und damit

$$\det(B) = (-1)^n \det(-B) = (-1)^n (1-n).$$

Aufgabe II.1 (4 Punkte)

Es sei $\Phi : \mathbb{C}^5 \longrightarrow \mathbb{C}^5$ ein Endomorphismus mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Φ besitzt 2 als einzigen Eigenwert.
(ii) Die Dimension des Eigenraumes zum Eigenwert 2 ist drei.
(iii) $(\Phi^2 - 2\Phi)^2 = O$ (Nullabbildung).

a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom und die Jordansche Normalform $\widetilde{A}$ von Φ.

b) Zeigen Sie, dass Φ bijektiv ist und bestimmen Sie die Jordansche Normalform von Φ^{-1}.

Lösung:

a) Da es nur den einen komplexen Eigenwert 2 gibt, ist $(X-2)^5$ das charakteristische Polynom von Φ. Das Minimalpolynom m muss ein Teiler hiervon sein, also von der Gestalt $(X-2)^s$ für eine Zahl s mit $1 \le s \le 5$. Da das Minimalpolynom m außerdem das annullierende Polynom $(X^2 - 2X)^2 = X^2(X-2)^2$ teilt, muss sogar $1 \le s \le 2$ gelten. Wäre nun $s = 1$, so wäre $\Phi = 2 \cdot \mathrm{id}_{\mathbf{C}^5}$ und hätte damit einen fünfdimensionalen Eigenraum. Da der Eigenraum aber nur dreidimensional ist, muss $s = 2$ gelten:

$$m = (X-2)^2.$$

Die Jordansche Normalform ist der Jordanblock zum Eigenwert 2. In diesem finden sich 3 Kästchen, da der Eigenraum dreidimensional ist. Die Länge des längsten Kästchens ist 2, da dies der Exponent des Linearfaktors $(X-2)$ im Minimalpolynom ist. Also ist die Jordansche Normalform die Matrix

$$\tilde{A} := \left(\begin{array}{cc|cc|c} 2 & 0 & & & \\ 1 & 2 & & & \\ \hline & & 2 & 0 & \\ & & 1 & 2 & \\ \hline & & & & 2 \end{array}\right)$$

b) Da 0 kein Eigenwert von Φ ist, ist Φ injektiv. Da $\mathbf{C}^5$ endlichdimensional ist, folgt aus der Injektivität auch die Bijektivität von Φ.
Weiter gilt

$$(\Phi^{-1} - \frac{1}{2})^2 = \frac{\Phi^{-2}}{4} \circ (\Phi - 2)^2 = \frac{\Phi^{-2}}{4} \circ m(\Phi) = 0.$$

Da Φ^{-1} nicht diagonalisierbar ist (sonst wäre Φ auch diagonalisierbar), ist also $(X - \frac{1}{2})^2$ das Minimalpolynom von Φ^{-1}. Damit ist $1/2$ der einzige Eigenwert von Φ^{-1}, und das längste Jordankästchen hat Länge 2.
Da schließlich Φ und Φ^{-1} dieselben Eigenräume haben, besitzt auch die Jordansche Normalform von Φ^{-1} genau drei Jordankästchen. Die Jordansche Normalform von Φ^{-1} ist demnach

$$\widetilde{A^{-1}} := \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1/2 & 0 & & & \\ 1 & 1/2 & & & \\ \hline & & 1/2 & 0 & \\ & & 1 & 1/2 & \\ \hline & & & & 1/2 \end{array}\right)$$

Aufgabe II.2 (4 Punkte)

Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^4$ mit Standardskalarprodukt seien eine Gerade g und eine Ebene E gegeben durch

$$g = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}] \quad , \quad E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}].$$

Berechnen Sie den Abstand $d(g, E)$ von g und E sowie $x \in g$ und $y \in E$ mit $d(x, y) = d(g, E)$.

Lösung:
Alle Punkte x der Geraden lassen sich beschreiben als $x = x_1 + a_1 u_1$, analog haben alle Punkte y eine Darstellung $y = x_2 + a_2 u_2 + a_3 y_3$, $a_i \in \mathbf{R}$. Damit ist

$$x - y = \begin{pmatrix} 5 - 2a_1 - 2a_3 \\ 0 - a_1 \\ 5 + a_2 + a_3 \\ 0 - 2a_2 - a_3 \end{pmatrix}.$$

Damit x und y gesuchte Lotfußpunkte sein können, muss nun gelten:

$$x - y \ \perp \ u_1, u_2, u_3.$$

Dies führt uns auf das inhomogene LGS

$$\begin{aligned} (5 - 2a_1 - 2a_3)(-2) + (-a_1)(-1) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 5a_1 + 4a_3 = 10 \\ (5 + a_2 + a_3)(-1) + (-2a_2 - a_3) \cdot 2 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -5a_2 - 3a_3 = 5 \\ (5 - 2a_1 - 2a_3) \cdot 2 + (5 + a_2 + a_3)(-1) + (-2a_2 - a_3) \cdot 1 = 0 & \\ &\Leftrightarrow \quad -4a_1 - 3a_2 - 6a_3 = -5, \end{aligned}$$

dessen Lösung wir zu $a_1 = 2, a_2 = -1, a_3 = 0$ bestimmen. Somit finden wir die Lotfußpunkte

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

sowie den gesuchten Abstand $d(g, E) = ||x - y|| = 5$.

Aufgabe II.3 (4 Punkte)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix und $A^\top$ ihre Transponierte. Zeigen Sie:

a) $A^\top A$ und $AA^\top$ sind symmetrisch und positiv definit.

b) Ist $x \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektor von $A^\top A$, so ist Ax Eigenvektor von $AA^\top$.

c) $A^\top A$ und $AA^\top$ sind ähnlich.

d) Es gibt eine orthogonale Matrix S mit $S^\top A^\top AS = AA^\top$.

Lösung:

a) Es gilt
$$\left(A^\top A\right)^\top = A^\top \left(A^\top\right)^\top = A^\top A$$
und
$$\left(A\,A^\top\right)^\top = \left(A^\top\right)^\top A^\top = A\,A^\top,$$
also ist sowohl $A^\top A$ als auch $A\,A^\top$ symmetrisch.

Sei nun $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Dann folgt aus der Regularität von A zunächst, dass $Ax \neq 0$ ist. Damit ergibt sich
$$x^\top A^\top Ax = (Ax)^\top Ax = ||Ax||^2 > 0.$$
(Dabei bezeichnet $||\cdot||$ die Norm des Standardskalarproduktes von $\mathbb{R}^n$.) $A^\top A$ ist also positiv definit.

Aus der Regularität von A folgt wegen $0 \neq \det A = \det A^\top$ die Regularität von $A^\top$ und somit, dass $A^\top x \neq 0$ ist. Man erhält folglich
$$x^\top A\,A^\top x = \left(A^\top x\right)^\top A^\top x = ||A^\top x||^2 > 0.$$
Daher ist auch $A\,A^\top$ positiv definit.

b) Sei $x \neq 0$ Eigenvektor von $A^\top A$ zum Eigenwert $c \in \mathbb{R}$, d.h.
$$A^\top Ax = cx.$$
Durch Multiplikation der Gleichung mit A erhält man
$$A\,A^\top Ax = Acx \quad\Longrightarrow\quad A\,A^\top(Ax) = c(Ax).$$
Wegen der Regularität von A folgt $Ax \neq 0$. Also ist Ax ein Eigenvektor von $A\,A^\top$ zum Eigenwert c.

c) Zu zeigen ist die Existenz einer regulären Matrix S mit $S^{-1}A\,A^\top S = A^\top A$. Dies ist für $S = A$ erfüllt, denn A ist nach Voraussetzung regulär und es gilt
$$A^{-1}A\,A^\top A = E\,A^\top A = A^\top A.$$

d) Nach a) sind $A^\top A$ und $A\,A^\top$ symmetrisch und daher diagonalisierbar. Weiter gibt es jeweils eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $A^\top A$ und $A\,A^\top$. Wegen c) sind $A^\top A$ und $A\,A^\top$ zu derselben Diagonalmatrix D ähnlich. Es gibt also orthogonale Matrizen U, T mit
$$U^\top A^\top A\,U = D \quad\text{und}\quad T^\top A\,A^\top T = D.$$
Man erhält also
$$U^\top A^\top A\,U = T^\top A\,A^\top T \quad\Longrightarrow\quad \left(U\,T^\top\right)^\top A^\top A\left(U\,T^\top\right) = A\,A^\top.$$
Definiere $S := U\,T^\top$. Dann ist S als Produkt orthogonaler Matrizen orthogonal und erfüllt $S^\top A^\top A\,S = A\,A^\top$.

Aufgabe II.4 (4 Punkte)

a) Im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt seien

$$\Phi_1 \text{ eine eigentliche Drehung um } [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}] \text{ mit Drehwinkel } \frac{\pi}{2}$$

und

$$\Phi_3 \text{ eine eigentliche Drehung um } [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}] \text{ mit Drehwinkel } \frac{\pi}{2}\ .$$

Geben Sie die Abbildungsmatrizen von Φ_1 und Φ_3 sowie von $\Phi_3 \circ \Phi_1$ bezüglich der Standardbasis an.

b) Bestimmen Sie die Normalform $\widetilde{A}$ der orthogonalen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sowie eine orthogonale Matrix S, so dass $S^\top AS = \widetilde{A}$ gilt.

Lösung :

a) **Abbildungsmatrix von Φ_1 bez. der Standardbasis $B = (e_1, e_2, e_3)$:**

$[e_1]$ ist Drehachse $\Rightarrow e_1^\perp = [e_2, e_3]$ ist Drehebene. Also nimmt Φ_1 bez. B seine Normalform

$$A_{\Phi_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

an, wobei wir $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$ und die Tatsache verwendet haben, dass Φ_1 eine eigentliche Drehung ist.

Abbildungsmatrix von Φ_3 bez. B:

Bezüglich (e_3, e_1, e_2) ist auch die Abbildungsamtrix von Φ_3 die Normalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(das sieht man wie bei Φ_1). $\Rightarrow$ bez. B hat Φ_3 die Abbildungsmatrix

$$A_{\Phi_3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abbildungsmatrix von $\Phi_3 \circ \Phi_1$ bez. B ist dann

$$A_{\Phi_3 \circ \Phi_1} = A_{\Phi_3} \cdot A_{\Phi_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

b) $\det(A) = 1$ (direkt oder aus a)) und $\mathrm{Spur} A = 0$. Also gilt $1 + 2\cos\omega = 0$, wenn ω der Drehwinkel von A ist.

$$\Rightarrow \widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

ist die Normalform von A. Der Eigenraum von A zum Eigenwert 1 ist

$$E_1 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}] \text{ und die Drehebene ist } E_1^{\perp} = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}].$$

Wir wählen

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nun ist

$$Ax_2 - \langle Ax_2, x_2 \rangle x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Normieren ergibt $x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^{\top}$ und $S = (x_1|x_2|x_3)$ ist die gesuchte Matrix.

Aufgabe II.5 (4 Punkte)

Es seien Φ ein Endomorphismus eines n-dimensionalen unitären Vektorraums V und für die adjungierte Abbildung Φ^* von Φ gelte $\Phi^* = 2\Phi^2 - \Phi$.

Zeigen Sie:

a) Φ ist normal.

b) Φ ist eine Orthogonalprojektion.

Lösung:

1. z.z.:Φ ist normal.

   Für alle $x \in V$ gilt:

$$\begin{aligned}\Phi(\Phi^*(x)) &= \Phi(2\Phi^2(x) - \Phi(x)) = 2\Phi^3(x) - \Phi^2(x) \\ &= (2\Phi^2 - \Phi)(\Phi(x)) = \Phi^*(\Phi(x)).\end{aligned}$$

   Daraus folgt: Φ ist normal.

2. z.z.: Φ ist Orthogonalprojektion.
   Da Φ normal ist, gibt es eine Orthonormalbasis B aus Eigenvektoren zu Eigenwerten $\lambda_1, \dots \lambda_n$. Sei A die Darstellungsmatrix von Φ und A^* die von Φ^* bezüglich B. Dann gilt:

$$A := D_{BB}(\Phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, A^* := D_{BB}(\Phi^*) = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}.$$

   Nach Aufgabenstellung gilt: $A^* = 2A^2 - A$, somit erfüllt für alle j aus $\{1, \dots n\}$ der Eigenwert λ_j die Gleichung:

$$\bar{\lambda}_j = 2\lambda_j^2 - \lambda_j.$$

   Setzt man die Darstellung $\lambda_j = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ in diese Gleichung ein, dann ergibt sich:

$$2(a^2 + 2abi - b^2) - (a + bi) = a - bi.$$

   $\Rightarrow 4ab = 0$ und $2(a^2 - b^2) - 2a = 0$.
   Also ist $a = 0$ oder $b = 0$.
   Falls $a = 0$, dann folgt aus der zweiten Gleichung $b = 0$; falls $b = 0$, dann folgt $a = 0$ oder $a = 1$.
   Insgesamt ist also $\lambda_j = 0$ oder $\lambda_j = 1$.
   Somit folgt, dass Φ Orthogonalprojektion ist, da seine Darstellungsmatrix bezüglich einer Orthonormalbasis eine Diagonalmatrix ist, die ausschließlich 0 oder 1 als Diagonaleinträge hat.

Aufgabe II.6 (4 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei für $s \in \mathbb{R}$ die affine Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \, , \, x \mapsto Ax + a$$

gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & s-1 & 2 \\ 0 & s-2 & 2 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \, , \quad a = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$ derart, dass φ eine Affinität ist und genau einen Fixpunkt sowie genau zwei Fixgeraden besitzt.

Lösung:
Gesucht sind alle $s \in \mathbb{R}$, für die die Abbildung φ eine Affinität ist, die genau einen Fixpunkt und genau zwei Fixgeraden hat.

1. φ ist Affinität $\Leftrightarrow x \mapsto Ax$ ist Isomorphismus $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
   $\Leftrightarrow s \notin \{0, 2\}$.

2. φ hat genau einen Fixpunkt:
   x ist Fixpunkt $\Leftrightarrow Ax + a = x \Leftrightarrow (A - E)x = -a$.
   Das heißt die Fixpunkte von φ sind die Lösungen des Gleichungssystems

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & s-1 & 2 & 8 \\ 0 & s-3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & s-1 & 4 \end{array}\right).$$

   Dieses ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante von $A - E$ nicht 0 ist, d.h. genau dann, wenn $s \notin \{1, 3\}$ ist.

3. φ hat genau zwei Fixgeraden:
   Ist v Richtung einer Fixgeraden, dann ist v Eigenvektor von A.
   Das charakteristische Polynom der Matrix A ist $(3 - x)(s - 2 - x)(s - x)$. Wären die Eigenwerte 3, $s - 2$, s paarweise verschieden, dann gäbe es drei linear unabhängige Eigenvektoren. Geraden durch den Fixpunkt in Richtung eines Eigenvektors sind Fixgeraden. Es gäbe also mindestens drei verschiedene Fixgeraden.
   Deshalb ist $s = 3$ oder $s = 5$. Der Fall $s = 3$ wurde in 2. bereits ausgeschlossen.

   Sei nun also $s = 5$, dann sind die beiden Eigenräume

   $$E_3 = < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > \text{ und } E_5 = < \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

   beide eindimensional. Da die Affinität genau einen Fixpunkt hat, sind die Fixgeraden genau die Geraden durch den Fixpunkt in Richtung eines Eigenvektors. Also gibt es in dem Fall $s = 5$ tatsächlich genau zwei Fixgeraden.

Insgesamt erfüllt also genau $s = 5$ die in der Aufgabe gestellten Bedingungen.