I.1 (4 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Menge

$$G := \left\{ A \in \mathbb{R}^{4\times 4} \mid A^\top J A = J \right\}.$$

Zeigen Sie:

a) G ist bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe.

b) Die Matrizen der Form
$$\begin{pmatrix} E & B \\ O & E \end{pmatrix},$$
wobei $E \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Einheitsmatrix, $O \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Nullmatrix und $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine symmetrische Matrix ist, gehören zu G.

Lösung:

a) Jedes $A \in G$ ist invertierbar, denn $\det(A)\det(J)\det(A) = \det(J) = 1 \neq 0$. Es ist also G Teilmenge der Gruppe $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ der regulären 4×4-Matrizen, und wir können das Untergruppenkriterium anwenden:

- G ist nicht leer, da die Einheitsmatrix in G liegt.
- Seien A_1 und A_2 Matrizen aus G. Dann gilt:
$$(A_1A_2)^\top JA_1A_2 = {A_2}^\top {A_1}^\top JA_1A_2 = {A_2}^\top JA_2 = J$$
und deshalb $A_1A_2 \in G$.
- Für $A \in G$ gilt aber auch:
$$A^\top JA = J \Leftrightarrow J = (A^\top)^{-1}JA^{-1} \Leftrightarrow J = (A^{-1})^\top JA^{-1},$$
weshalb auch $A^{-1} \in G$ ist.

Damit ist gezeigt, dass G eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ ist.

b) Das überprüfen wir durch Ausrechnen:

$$\begin{pmatrix} E & B \\ O & E \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & B \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ B & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & B \\ O & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ B & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & E \\ -E & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & E \\ -E & O \end{pmatrix}$$

I.2 (4 Punkte)

Es seien V ein Vektorraum und Φ ein Endomorphismus von V. Zeigen Sie:

a) Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

(i) $\operatorname{Kern}\Phi \cap \operatorname{Bild}\Phi = \{\boldsymbol{o}\}$.

(ii) Für alle $\boldsymbol{x} \in V$ mit $\Phi^2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$ gilt $\Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$.

b) Falls außerdem $\dim V < \infty$ gilt, so ist zu (i), (ii) ferner äquivalent:

(iii) $V = \operatorname{Kern}\Phi \oplus \operatorname{Bild}\Phi$.

Lösung:

a)

$$\operatorname{Kern}\Phi \cap \operatorname{Bild}\Phi = \{\boldsymbol{o}\} \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x} \in V \text{ mit } \Phi^2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o} \text{ gilt } \Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$$

'$\Rightarrow$'

Sei $\boldsymbol{x} \in V$ mit $\Phi^2(\boldsymbol{x}) = \Phi(\Phi(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{o} \implies \Phi(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Kern}\Phi$ und $\Phi(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Bild}\Phi$
$\implies \Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$

'$\Leftarrow$'

'$\supset$' klar

'$\subset$' Sei $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Kern}\Phi \cap \operatorname{Bild}\Phi \implies \Phi(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{o}$ und $\exists \boldsymbol{x} \in V : \boldsymbol{y} = \Phi(\boldsymbol{x})$
$\implies \Phi^2(\boldsymbol{x}) = \Phi(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{o} \implies \Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o} \implies \boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$

b) Wir zeigen die folgende Äquivalenz

$$\operatorname{Kern}\Phi \cap \operatorname{Bild}\Phi = \{\boldsymbol{o}\} \Leftrightarrow V = \operatorname{Kern}\Phi \oplus \operatorname{Bild}\Phi$$

'$\Rightarrow$'

Wir müssen nur $V = \operatorname{Kern}\Phi + \operatorname{Bild}\Phi$ zeigen

Offensichtlich ist $V \supset \operatorname{Kern}\Phi + \operatorname{Bild}\Phi$. Wegen

$$\begin{aligned}
\dim(\operatorname{Kern}\Phi + \operatorname{Bild}\Phi) &= \dim(\operatorname{Kern}\Phi) + \dim(\operatorname{Bild}\Phi) - \dim(\operatorname{Kern}\Phi \cap \operatorname{Bild}\Phi) && \text{(Dim.satz für UVRe)}\\
&= \dim(\operatorname{Kern}\Phi) + \dim(\operatorname{Bild}\Phi)\\
&= n && \text{(Dim.-Satz für lin. Abb.)}
\end{aligned}$$

folgt schließlich $V = \operatorname{Kern}\Phi + \operatorname{Bild}\Phi$.

'$\Leftarrow$'

Da die Summe direkt ist, folgt automatisch $\operatorname{Kern}\Phi \cap \operatorname{Bild}\Phi = \{\boldsymbol{o}\}$.

I.3 (4 Punkte)

Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^5$ seien zwei Untervektorräume

$$U := [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3] \quad \text{und} \quad W := [\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3]$$

gegeben mit

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils eine Basis des Schnittraums $U \cap W$ und des Faktorraums $(U+W)/(U \cap W)$.

Lösung: Der Ansatz, mit den gegebenen Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ den Nullvektor zu kombinieren, führt auf ein LGS mit den Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_3$ in **den Spalten** der Matrix. Auf diese Matrix wenden wir den Gauß'schen Algorithmus an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot(-1) \\ \mid \cdot(-1/2) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus der Gauß'schen Normalform liest man ab:

(i) die ersten vier Vektoren, also $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{y}_1$, bilden eine Basis von $U+W$,

(ii) die ersten drei Spalten sind lin. unabh. d.h. $\dim U = 3$ und die letzen drei Spalten sind lin. unabh. d.h. $\dim W = 3$. Also muss $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 3+3-4 = 2$ sein,

(iii) Die Vektoren $(1,-1,0,1,-1,0)^\top$ und $(1,0,1,1,0,-1)^\top$ bilden eine Basis des Lösungsraums des zur Matrix gehörigen homogenen LGS, also ist

$$\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{o} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{o}.$$

Damit bilden $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 = -\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 = (-1,0,0,2,-3)^\top$ und $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_3 = -\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_3 = (0,1,1,3,-2)^\top$ eine **Basis** von $U \cap W$.

Wegen $U+W = [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{y}_1] = [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{y}_1]$ ergänzen die Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1$ die Basis $\{\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_3\}$ von $U \cap W$ zu einer Basis von $U+W$. Folglich bildet

$$\boldsymbol{x}_1 + (U \cap W), \quad \boldsymbol{y}_1 + (U \cap W)$$

eine **Basis** von $(U+W)/(U \cap W)$.

I.4 (4 Punkte)

Es sei $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei endlichdimensionalen K-Vektorräumen. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(i) Φ ist surjektiv.

(ii) Für jede Linearform $\Psi : W \to K$ gilt: $(\Psi \circ \Phi = 0 \implies \Psi = 0)$.
(Hierbei bezeichnet 0 die Nullabbildung.)

Lösung:

(i)$\Rightarrow$(ii): Es sei Φ surjektiv und $\Psi : W \longrightarrow K$ eine Linearform. Weiter gelte $\Psi \circ \Phi = 0$. Es ist zu zeigen, dass dann bereits $\Psi = 0$ gilt. Das heißt aber: für alle $\boldsymbol{w} \in W$ ist $\Psi(\boldsymbol{w}) = 0$.

Dies gilt, denn wenn $\boldsymbol{w} \in W$ beliebig ist, so gibt es wegen der Surjektivität von Φ ein $\boldsymbol{v} \in V$ mit $\boldsymbol{w} = \Phi(\boldsymbol{v})$. Also folgt

$$\Psi(\boldsymbol{w}) = \Psi(\Phi(\boldsymbol{v})) = (\Psi \circ \Phi)(\boldsymbol{v}) = 0.$$

Damit ist Ψ die Nullabbildung.

(i)$\Leftarrow$(ii): Für jede Linearform Ψ auf W gelte die Implikation $(\Psi \circ \Phi = 0 \Longrightarrow \Psi = 0)$. Es ist zu zeigen, dass dann Φ surjektiv ist. Dazu sei $n := \dim W$.

Bild Φ ist ein Untervektorraum U von W. Es sei $d := \dim U$. Hierbei gilt $d \leq n$. Es ist zu zeigen, dass $d = n$ gilt.

Dazu wählt man eine Basis $B = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_d\}$ von U und ergänzt sie durch $\{\boldsymbol{b}_{d+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ zu einer Basis von W. Nun definiert man die Linearform Ψ auf W durch die Vorgabe

$$\Psi(\boldsymbol{b}_i) = \begin{cases} 0, & 1 \leq i \leq d, \\ 1, & d+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Für beliebiges $\boldsymbol{v} \in V$ ist der Vektor $\Phi(\boldsymbol{v}) \in U$ eine Linearkombination von $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_d$. Daher gilt

$$(\Psi \circ \Phi)(\boldsymbol{v}) = \Psi(\Phi(\boldsymbol{v})) = 0.$$

Also ist $\Psi \circ \Phi$ die Nullabbildung, und damit auch Ψ die Nullabbildung nach Voraussetzung. Es folgt $\Psi(\boldsymbol{b}_i) = 0$ für alle i mit $1 \leq i \leq n$, also gibt es kein i mit $d + 1 \leq i \leq n$, weswegen $n \leq d$ folgt. Damit ist $d = n$.

I.5 (4 Punkte)

Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ sei ein Endomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ gegeben mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2t & 2t+2 \\ -t^2+t & 1 & -t+1 & 2t^2-t-1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -t & t+2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte von Φ.

b) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die Φ diagonalisierbar ist.

c) Berechnen Sie für $t = 0$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von Φ.

Lösung: a) Für das charaktistische Polynom $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ gilt

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & -2t & 2t+2 \\ -t^2+t & 1-\lambda & -t+1 & 2t^2-t-1 \\ -1 & 0 & -\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -t & t+2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -2+2\lambda \\ -0 & t-\lambda & \lambda - t \\ -1 & -t & t+2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -0 & t-\lambda & 0 \\ -1 & -t & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2(t-\lambda) \end{aligned}$$

A besitzt damit die (nicht notwendig verschiedenen Eigenwerte) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = t$.

b) Wir betrachten den Eigenraum E_1 zum Eigenwert λ_1. Es ist $\dim E_1 = 4 - \operatorname{Rang}(A - E)$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Rang}(A-E) &= \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2t & 2t+2 \\ -t^2+t & 0 & -t+1 & 2t^2-t-1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -t & t+1 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} t(1-t) & 0 & 0 & 2t(t-1) \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-t & t-1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 \text{ für } t = 1, \\ 2 \text{ für } t = 0, \\ 3 \text{ sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Hiermit folgt, dass für $t \notin \{0, 1\}$ wegen $\dim E_1 = 1$ die Matrix A **nicht diagonalisierbar** ist. Für $t = 1$ ist $\dim E_1 = 3$. Aus dem zugehörigen charakteristischem Polynom $p(\lambda) = -\lambda(1-\lambda)^3$ folgt dann, dass A in diesem Fall diagonalisierbar ist.
Für $t = 0$ ergibt sich für den Eigenraum E_0 zum Eigenwert $\lambda = 0$ die Dimension

$$\dim E_0 = 4 - \operatorname{Rang}(A - OE) = 4 - \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2,$$

womit auch in diesem Fall wegen $\dim E_0 + \dim E_1 = 2 + 2 = 4$ die Matrix A diagonalisierbar ist. Insgesamt gilt:

$$A \text{ ist diagonalisierbar} \quad \Leftrightarrow \quad t \in \{0, 1\}$$

c) Mit den Matrizen aus Teil b) liest man für $t = 0$ die entsprechenden Eigenräume ab (es wurden nur Zeilenoperationen benutzt!).

$$E_1 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad \text{und} \quad E_0 = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

Diese vier erzeugenden Vektoren bilden damit eine Basis aus Eigenvektoren.

I.6 (4 Punkte)

Mit einem reellen Parameter t sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \geq 2)$ gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1+t^2 & t & 0 & \cdots & 0 \\ t & 1+t^2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & 0 & t & 1+t^2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $D_n := \det A$ mittels vollständiger Induktion nach n. Folgern Sie, dass das lineare Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für alle Vektoren $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar ist.

Lösung:

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{vmatrix} 1+t^2 & t \\ t & 1+t^2 \end{vmatrix} = (1+t^2)^2 - t^2 = 1 + t^2 + t^4 \\ D_3 &= \begin{vmatrix} 1+t^2 & t & 0 \\ t & 1+t^2 & t \\ 0 & t & 1+t^2 \end{vmatrix} = (1+t^2)^3 - t^2(1+t^2) - t^2(1+t^2) = 1 + t^2 + t^4 + t^6 \end{aligned}$$

Behauptung: $D_n = 1 + t^2 + t^4 + \cdots + t^{2n} = \sum_{i=0}^{n} t^{2i}$

Beweis: Vollständige Induktion

Induktionsanfang: $n = 2, 3$ siehe oben.

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $D_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} t^{2i}$ und $D_{n-2} = \sum_{i=0}^{n-2} t^{2i}$.

Induktionsschluss: Durch Entwickeln nach der ersten Zeile findet man

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 1+t^2 & t & 0 & \cdots & 0 \\ t & 1+t^2 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & 0 & t & 1+t^2 \end{vmatrix} \\ &= (1+t^2)D_{n-1} - t \begin{vmatrix} t & t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+t^2 & t & \ddots & \vdots \\ 0 & t & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \cdots & 0 & t & 1+t^2 \end{vmatrix} \\ &= (1+t^2)D_{n-1} - t^2 D_{n-2} = (1+t^2)\sum_{i=0}^{n-1} t^{2i} - t^2 \sum_{i=0}^{n-2} t^{2i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} t^{2i} + t^2 \sum_{i=0}^{n-1} t^{2i} - t^2 \sum_{i=0}^{n-2} t^{2i} = \sum_{i=0}^{n-1} t^{2i} + t^{2n} \\ &= \sum_{i=0}^{n} t^{2i} = 1 + t^2 + t^4 + \cdots + t^{2n} \,. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt daraus $D_n \geq 1 > 0$. Damit ist die Matrix A regulär und das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar.

II.1 (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die die folgenden beiden Matrizen ähnlich sind:

$$A_t := \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t+4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie für $t = -3$ eine Transformationsmatrix S mit $S^{-1}A_{-3}S = B$.

Lösung:

a) Da die Spur eine Invariante ähnlicher Matrizen ist, muss notwendigerweise $\mathrm{Spur}A_t = \mathrm{Spur}B$ gelten. Somit können A_t und B nur für $t = -3$ ähnlich sein.

$A := A_{-3}$ und B sind genau dann ähnlich, wenn sie die gleiche Jordan'sche Normalform haben. Da B schon in Jordanform ist, genügt es, A zu betrachten.

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 3)^3$$

Das Minimalpolynom von A ist somit von der Form $m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 3)^s$ mit $s \in \{1, 2, 3\}$. Es bleibt nun die Bestimmung von s. Wegen

$$\mathrm{Rang}(A + 3E) = \mathrm{Rang} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

gibt es im Jordanblock zum Eigenwert -3 genau $4 - 2 = 2$ Kästchen. Davon muss eines die Länge 2 haben. Somit gilt $s = 2$ und B ist die Jordanform von A. A_t und B sind also genau für $t = -3$ ähnlich.

b)

$$E_1 := \mathrm{Kern}(A - E) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = [\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]$$

$$H_{-3} := \mathrm{Kern}(A + 3E)^2 = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}].$$

$$E_{-3} := \mathrm{Kern}(A + 3E) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}].$$

Wir wählen nun

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in H_{-3} \backslash E_3, \quad v_2 = (A + 3E)v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_{-3}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{-3} \backslash [v_2]$$

Mit dem Eigenvektor $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_1$ ergibt sich die Transformationsmatrix $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

II.2 (4 Punkte)

Es seien V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ und Φ ein Endomorphismus von V. Durch

$$F : \begin{cases} V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) & \mapsto & \langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle \end{cases}$$

wird eine Bilinearform erklärt.

a) Zeigen Sie:
F ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn Φ selbstadjungiert ist und alle Eigenwerte von Φ positiv sind.

b) Es sei $V = \mathbb{R}^3$ versehen mit dem Standardskalarprodukt und $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ die Standardbasis. Weiter sei durch

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{e}_1) &= \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 \\ \Phi(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) &= 3\boldsymbol{e}_2 \\ \Phi(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) &= 3\boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

ein Endomorphismus Φ von V definiert. Zeigen Sie, dass die zugehörige Bilinearform F ein Skalarprodukt ist.

Lösung: a) Wir zeigen zunächst: $(*)$ $\quad F$ symmetrisch $\Leftrightarrow$ Φ selbstadjungiert.

$$F \text{ symmetrisch } \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V : F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \Leftrightarrow$$
$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V : \langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle = \langle \Phi(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \Phi(\boldsymbol{y}) \rangle \Leftrightarrow \Phi \text{ selbstadjungiert.}$$

Beh: F Skalarprodukt $\Leftrightarrow$ Φ selbstadjungiert mit ausschließlich positiven Eigenwerten.

'$\Longrightarrow$' Ist F Skalarprodukt, so folgt nach $(*)$, dass Φ selbstadjungiert ist. Sei λ Eigenwert von Φ und $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann ist $\lambda > 0$ wegen

$$0 < F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \rangle = \langle \lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \, .$$

'$\Longleftarrow$' Da Φ selbstadjungiert ist, existiert eine Orthonormalbasis $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. Dabei gelte $\forall i = 1, \dots, n : \Phi(\boldsymbol{e}_i) = \lambda_i \boldsymbol{e}_i$. Sei $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{e}_i \in V$ mit $\xi_i \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i \boldsymbol{e}_i, \sum_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{e}_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2 \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2 \geq 0$$

und

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \xi_1 = \dots = \xi_n = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}.$$

Also ist F positiv definit und damit ein Skalarprodukt.

b) Die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich der Standardbasis ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

Da die Standardbasis eine ONB und A symmetrisch ist, ist Φ selbstadjungiert. Φ besitzt nur positive Eigenwerte, wenn A positiv definit ist. Nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz folgt die positive Definitheit aus

$$|1| = 1 > 0 \, , \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0 \text{ und } |A| = 5 \cdot 3 = 15 > 0.$$

Nach a) ist F ein Skalarprodukt.

II.3 (4 Punkte)

Es sei Φ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums V mit Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$. Für die zugehörige adjungierte Abbildung Φ^* gelte $\Phi^* = -\Phi$. Zeigen Sie:

a) Für alle $\boldsymbol{x} \in V$ gilt $\langle \boldsymbol{x}, \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle = 0$.

b) Der Endomorphismus Φ^2 ist selbstadjungiert und jeder Eigenwert λ von Φ^2 ist negativ oder null.

c) Ist $\lambda < 0$ Eigenwert von Φ^2 und $\boldsymbol{x}$ ein zugehöriger Eigenvektor, dann ist $W := [\boldsymbol{x}, \Phi(\boldsymbol{x})]$ ein zweidimensionaler Φ-invarianter Unterraum von V.

d) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ des Untervektorraums W aus Teil c), bezüglich der $\Phi|_W$ die Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-\lambda} \\ \sqrt{-\lambda} & 0 \end{pmatrix} \text{ besitzt.}$$

Lösung:

a) Für alle $\boldsymbol{x} \in V$ gilt $\langle \Phi(x), \boldsymbol{x} \rangle = -\langle \boldsymbol{x}, \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle \implies 2\langle \boldsymbol{x}, \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle = 0$, also $\langle \boldsymbol{x}, \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle = 0$.

b) Für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ gilt:

$$\langle \Phi^2(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle = \langle \Phi(\boldsymbol{x}), \Phi^*(\boldsymbol{y}) \rangle = \langle \boldsymbol{x}, (\Phi^* \circ \Phi^*)(\boldsymbol{y}) \rangle = \langle \boldsymbol{x}, (-\Phi)^2(\boldsymbol{x}) \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \Phi^2(\boldsymbol{y}) \rangle,$$

also ist Φ^2 selbstadjungiert. Ist λ ein Eigenwert von Φ^2 und $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ ein zugehöriger Eigenvektor, so gilt

$$\lambda \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \Phi^2(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \rangle = \langle \Phi(\boldsymbol{x}), \Phi^*(\boldsymbol{x}) \rangle = -\langle \Phi(\boldsymbol{x}), \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle \leq 0,$$

woraus wegen $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0$ die Behauptung $\lambda \leq 0$ folgt.

c) Zunächst ist unter diesen Voraussetzungen W Φ-invariant, denn es gilt:

$$\Phi(W) = \left[\Phi(\boldsymbol{x}), \Phi^2(\boldsymbol{x})\right] = [\Phi(\boldsymbol{x}), \lambda \boldsymbol{x}] \overset{\lambda \neq 0}{=} [\Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}] = W$$

Weiter ist $\dim W = 2$. Wären nämlich $\boldsymbol{x}, \Phi(\boldsymbol{x})$ lin. abh., so wäre $\Phi(\boldsymbol{x}) = \mu \boldsymbol{x}$ wegen $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$. Aus $0 = \langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \rangle = \mu \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle$ folgt $\mu = 0$. Also wäre auch $\Phi^2(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$ im Widerspruch zu $\Phi^2(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$ mit $\lambda < 0$ und $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$.

d) Sei $\boldsymbol{x}$ Eigenvektor von Φ^2 zum Eigenwert λ. Nach a) und c) gilt dann $\Phi(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{o}$ und $\boldsymbol{x} \perp \Phi(\boldsymbol{x})$. Also ist

$$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\} \text{ mit } \boldsymbol{e}_1 := \frac{1}{||\boldsymbol{x}||}\boldsymbol{x} \text{ und } \boldsymbol{e}_2 := \frac{1}{||\Phi(\boldsymbol{x})||}\Phi(\boldsymbol{x})$$

eine ONB von W. Für sie gilt:

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{e}_1) &= \frac{1}{||\boldsymbol{x}||}\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{||\Phi(\boldsymbol{x})||}{||\boldsymbol{x}||}\boldsymbol{e}_2 \\ \Phi(\boldsymbol{e}_2) &= \frac{1}{||\Phi(\boldsymbol{x})||}\Phi^2(\boldsymbol{x}) = \frac{\lambda}{||\Phi(\boldsymbol{x})||}\boldsymbol{x} = \frac{\lambda||\boldsymbol{x}||}{||\Phi(\boldsymbol{x})||}\boldsymbol{e}_1 \end{aligned}$$

Nun ergeben sich aus

$$\lambda \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \Phi^2(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \rangle = -\langle \Phi(\boldsymbol{x}), \Phi(\boldsymbol{x}) \rangle$$

die Bedingungen

$$\frac{||\Phi(\boldsymbol{x})||}{||\boldsymbol{x}||} = \sqrt{-\lambda} = -\frac{\lambda||\boldsymbol{x}||}{||\Phi(\boldsymbol{x})||}.$$

Damit hat die Abbildungsmatrix von $\Phi|_W$ bezüglich $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ die geforderte Form.

II.4 (4 Punkte)
Im euklidischen Standardvektorraum $\mathbb{R}^4$ sei bzgl. der Standardbasis eine Isometrie durch ihre Abbildungsmatrix

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & 1 & 2-\sqrt{3} & -1 \\ -1 & 2+\sqrt{3} & 1 & 2-\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} & -1 & 2+\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 2-\sqrt{3} & -1 & 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die Normalform $\tilde{A}$ dieser Isometrie und eine orthogonale Matrix S, für die $\tilde{A} = S^\top A\, S$ gilt.

Lösung:

$\det(A + A^\top - \lambda E) =$

$$= \begin{vmatrix} 1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda & 0 & 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda & 0 & 1-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda & 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & 1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda & 1-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & 1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \left[(1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda)^2 - (1-\frac{\sqrt{3}}{2})^2\right]^2 = \left[\left((1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda)+(1-\frac{\sqrt{3}}{2})\right)\left((1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\lambda)-(1-\frac{\sqrt{3}}{2})\right)\right]^2$$
$$= (2-\lambda)^2(\sqrt{3}-\lambda)^2$$

Damit hat $A + A^\top$ die doppelten Eigenwerte 2 und $\sqrt{3}$. Also hat A den doppelten Eigenwert 1 und in der Normalform $\tilde{A}$ von A gibt es ein Drehkästchen mit $\cos\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\sin\omega = \frac{1}{2}$.

Eine Basis des Eigenraums E_1 zum Eigenwert 1 von A erhält man als Lösung des Gleichungssystems $(A - E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$:

$$A-E = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2+\sqrt{3} & 1 & 2-\sqrt{3} & -1 \\ -1 & -2+\sqrt{3} & 1 & 2-\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} & -1 & -2+\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 2-\sqrt{3} & -1 & -2+\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow E_1 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$$

Eine ONB von $E_1^\perp$, dem Eigenraum von $A + A^\top$ zum Eigenwert $\sqrt{3}$, ist zum Beispiel

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Wegen

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & 1 & 2-\sqrt{3} & -1 \\ -1 & 2+\sqrt{3} & 1 & 2-\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} & -1 & 2+\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 2-\sqrt{3} & -1 & 2+\sqrt{3} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine mögliche orthogonale Transformationsmatrix mit zugehöriger Normalform gegeben durch

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

II.5 (4 Punkte)

Es seien Φ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen unitären Vektorraums V und Φ^* die zugehörige adjungierte Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Φ ist normal.

(ii) Es gibt eine Isometrie Ψ von V mit $\Phi^* = \Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$.

Lösung:

Beh:

$$\text{(i)} \quad \Leftrightarrow \quad \text{(ii)}.$$

'$\Longleftarrow$'

Sei Ψ Isometrie mit $\Phi^* = \Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$. Dann gilt:

$$\Phi \circ \Phi^* = \Phi \circ (\Psi \circ \Phi) = (\Phi \circ \Psi) \circ \Phi = \Phi^* \circ \Phi\,,$$

also ist Φ normal.

'$\Longrightarrow$'

Sei Φ normal. Weil V endlichdimensional ist ($\dim V =: n$), existiert eine Orthonormalbasis $B = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ aus Eigenvektoren von Φ. Die jeweils zugehörigen Eigenwerte seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

Bezüglich B gilt für die Abbildungsmatrizen von Φ bzw. Φ^*:

$$A_\Phi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A_{\Phi^*} = \left(\overline{A_\Phi}\right)^\top = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Wir setzen

$$C = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \gamma_i := \begin{cases} 1 & \text{für } \lambda_i = 0 \\ \frac{\overline{\lambda_i}}{\lambda_i} & \text{für } \lambda_i \neq 0 \end{cases}.$$

Wegen $|\gamma_i| = 1$ für $i = 1, \ldots, n$ beschreibt C, als Abbildungsmatrix bezüglich B aufgefasst, eine Isometrie Ψ und wegen

$$A_{\Phi^*} = A_\Phi C = C A_\Phi$$

folgt mit der so gefundenen Isometrie Ψ

$$\Phi^* = \Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi\,.$$

II.6 (4 Punkte)

Im reellen dreidimensionalen affinen Raum $\mathbb{A}^3$ sei bezüglich eines affinen Koordinatensystems $(O; \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ die Quadrik Q gegeben durch

$$Q \quad : \quad -4x_1^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 + 16x_1 - 12x_2 - 2x_3 + 20 = 0.$$

Bestimmen Sie die affine Normalform $\widetilde{Q}$ von Q und geben Sie eine Affinität φ an, die Q auf $\widetilde{Q}$ abbildet.

Lösung:

Quadratische Ergänzung liefert

$$\begin{aligned}
0 &= -4x_1^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 + 16x_1 - 12x_2 - 2x_3 + 20 \\
&= -(2x_1 - x_2 + \frac{3}{2}x_3 - 4)^2 + x_2^2 + \frac{5}{4}x_3^2 + x_2x_3 - 4x_2 - 14x_3 + 36 \\
&= -(2x_1 - x_2 + \frac{3}{2}x_3 - 4)^2 + (x_2 + \frac{1}{2}x_3 - 2)^2 + x_3^2 - 12x_3 + 32 \\
&= -(2x_1 - x_2 + \frac{3}{2}x_3 - 4)^2 + (x_2 + \frac{1}{2}x_3 - 2)^2 + (x_3 - 6)^2 - 4 \\
\Leftrightarrow \quad & \underbrace{(x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_3 - 2)}_{=:\widetilde{x}_1}{}^2 - (\underbrace{\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 - 1}_{=:\widetilde{x}_2})^2 - (\underbrace{\frac{1}{2}x_3 - 3}_{=:\widetilde{x}_3})^2 + 1 = 0
\end{aligned}$$

Damit ist die Normalform $\widetilde{Q}$ von Q gegeben durch

$$\widetilde{Q} : \widetilde{x}_1^2 - \widetilde{x}_2^2 - \widetilde{x}_3^2 + 1 = 0,$$

es handelt sich also um ein zweischaliges Hyperboloid.

Eine Affinität φ, die Q auf $\widetilde{Q}$ abbildet, ist nach obiger Rechnung gegeben durch

$$\varphi : \vec{\widetilde{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$