Aufgabe I.1 (4 Punkte)

Es sei $G := \{e, g_1, g_2, g_3\}$ eine 4-elementige Gruppe mit neutralem Element e. Die Verknüpfung auf G werde mit $\circ$ bezeichnet. Außerdem seien in G folgende Gleichungen erfüllt: $g_1 \circ g_1 = g_2$ und $g_1 \circ g_2 = g_3$.

a) Stellen Sie die Verknüpfungstafel von G auf.

b) Es seien $(G, \circ)$ die Gruppe aus Teil a) und $\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ die Menge aller Restklassen in $\mathbb{Z}$ modulo $5\mathbb{Z}$.

   Zeigen Sie, dass der einzige Gruppenhomomorphismus von $(G, \circ)$ nach $(\mathbb{Z}_5, +)$ die Abbildung
$$\begin{array}{rccc} \Phi: & G & \to & \mathbb{Z}_5 \\ & g & \mapsto & 0 \end{array}$$
   ist.

Lösung:

a) Aus der Definition des neutralen Elements, den beiden Gleichungen $g_1 \circ g_1 = g_2$ und $g_1 \circ g_2 = g_3$ sowie der Tatsache, dass jedes Element in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal auftaucht, ergibt sich

$\circ$	e	g_1	g_2	g_3
e	e	g_1	g_2	g_3
g_1	g_1	g_2	g_3	e
g_2	g_2	g_3	e	g_1
g_3	g_3	e	g_1	g_2

   als Verknüpfungstafel von $(G, \circ)$.

b) Sei $\Psi : G \to \mathbb{Z}_5$ ein Gruppenhomomorphismus, es gilt also auf jeden Fall $\Psi(e) = 0$.

   Aus der Verknüpfungstafel liest man $g_2 \circ g_2 = e$ ab. Dann folgt $\Psi(g_2) + \Psi(g_2) = \Psi(e) = 0$. Das einzige Element in $\mathbb{Z}_5$, das dies erfüllt ist $\Psi(g_2) = 0$.

   Aus $g_1 \circ g_1 = g_2$ folgt analog $\Psi(g_1) + \Psi(g_1) = \Psi(g_2) = 0$, also $\Psi(g_1) = 0$.

   Aus $g_1 \circ g_2 = g_3$ folgt $\Psi(g_1) + \Psi(g_2) = \Psi(g_3)$, also $\Psi(g_3) = 0$.

   Somit ist $\Psi = \Phi$.

   Alternative: Wir sehen $g_1^2 = g_2, g_1^3 = g_2 \circ g_1 = g_3$ und $g_1^4 = g_2 \circ g_2 = e$. Daher ist $g_1 = g_1^5$ und es ergibt sich
$$f(g_1) = f(g_1^5) = 5f(g_1) = 0.$$
   Insgesamt folgt $f(g_2) = 2f(g_1) = 0$ und $f(g_3) = 3f(g_1) = 0$. $f(e) = 0$ gilt ohnehin.

Aufgabe I.2 (4 Punkte)

Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, dessen Dimension mindestens 3 ist, und Φ ein Endomorphismus von V. Alle zweidimensionalen Untervektorräume von V seien Φ-invariant. Zeigen Sie:

a) Alle eindimensionalen Untervektorräume von V sind Φ-invariant.

b) Es gibt ein $c \in \mathbb{K}$, sodass $\Phi = c \cdot \mathrm{id}_V$ ist.

Lösung:

a) Es sei U ein eindimensionaler Untervektorraum von V und $u \in U \setminus \{0\}$ beliebig. Dann gilt $U = [u]$. Wir wählen zwei weitere Vektoren $v, w \in V$, sodass u, v und w drei linear unabhängige Vektoren sind. Das geht, da $\dim(V) \geq 3$ vorausgesetzt ist. Nun setzen wir

$$U_1 := [u, v], \quad U_2 := [u, w].$$

Das sind dann zwei zweidimensionale Untervektorräume von V, deren Durchschnitt gerade U ist. Wieder nach Voraussetzung sind U_1 und U_2 unter Φ invariant. Daher gilt

$$\Phi(U) = \Phi(U_1 \cap U_2) \subset \Phi(U_1) \cap \Phi(U_2) \subset U_1 \cap U_2 = U.$$

Deshalb ist U unter Φ invariant.

b) Es sei $v \in V$ ein beliebiger Vektor $\neq 0$. Dann gibt es nach Teil a) ein $c \in \mathbb{K}$ mit $\Phi(v) = c \cdot v$. Wir müssen zeigen, dass für alle $w \in V$ gilt:

$$\Phi(w) = c \cdot w.$$

Das ist klar für $w \in [v]$.

Es sei also $w \in V \setminus [v]$, das heißt: v und w sind linear unabhängig.

Dann gibt es wegen a) ein $d \in \mathbb{K}$ mit $\Phi(w) = d \cdot w$.

Wir müssen $c = d$ einsehen. Dazu betrachten wir $v + w$.

Wegen a) gibt es ein $e \in \mathbb{K}$ mit $\Phi(v + w) = e \cdot (v + w)$.

Die Additivität von Φ erzwingt nun

$$0 = \Phi(v + w) - (\Phi(v) + \Phi(w)) = e \cdot (v + w) - (c \cdot v + d \cdot w) = (e - c) \cdot v + (e - d) \cdot w.$$

Da v und w linear unabhängig sind, folgt hieraus

$$e - c = 0 = e - d, \quad \text{also} \quad c = e = d$$

wie gewünscht. Das zeigt

$$\Phi = c \cdot \mathrm{id}_V.$$

Aufgabe I.3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem, das die Lösungsmenge

$$L = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}] \subset \mathbb{R}^5$$

hat.

Lösung: Betrachten wir zunächst das homogene lineare Gleichungssystem, das durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Der Gauß-Algorithmus liefert:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \frac{1}{2} \\ \\ + \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -1 \\ + \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ \mid \frac{1}{3} \quad -1 \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ -1 \mid \frac{1}{2} \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge dieses linearen Gleichungssystems ist

$$U' = [\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}];$$

in Matrix-Schreibweise liest sich das wie folgt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

beziehungsweise

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^{\top} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\top} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit besitzt das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_4 - 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

die Lösungsmenge

$$U = [\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}].$$

Wir müssen also nur noch ein $b \in \mathbb{R}^2$ finden mit

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = b.$$

Ausmultiplizieren liefert

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aus der Lösungstheorie für lineare Gleichungssystem ergibt sich dann sofort, dass das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_4 - 2x_5 &= 2 \end{aligned}$$

die Lösungsmenge L hat.

Aufgabe I.4 (4 Punkte)

Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $U, W \subset V$ Untervektorräume von V und V^* der Dualraum von V. Dann ist die Menge

$$U^0 := \{x^* \mid x^* \in V^* \text{ und } x^*(y) = 0 \text{ für alle } y \in U\}$$

ein Untervektorraum von V^*. Zeigen Sie:

a) $\dim U + \dim U^0 = n$.

b) $(U + W)^0 = U^0 \cap W^0$.

Lösung:

a) Seien also $0 \leq \dim U = m \leq n$ und $\{x_1, \ldots, x_m\}$ eine Basis von U. Dann existieren Vektoren $x_{m+1}, \ldots, x_n \in V$, so dass $B := \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis von V ist. Es bezeichne $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ die zu B duale Basis von V^* und $U' := [x_{m+1}^*, \ldots, x_n^*]$ den von $x_{m+1}^*, \ldots, x_n^*$ erzeugten Untervektoraum von V^*. Wir zeigen zunächst, dass $U' = U^0$ ist.

Sei $x^* \in U'$. Dann existieren $a_{m+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ mit $x^* = a_{m+1}x_{m+1}^* + \cdots + a_n x_n^*$. Nach Definition der dualen Basis gilt dann für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$:

$$x^*(x_i) = a_{m+1}x_{m+1}^*(x_i) + \cdots + a_n x_n^*(x_i) = 0,$$

also $x^*(y) = 0$ für alle $y \in U$. Damit ist $x^* \in U^0$.

Sei $y^* \in U^0$. Dann existieren $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ mit $y^* = b_1 x_1^* + \cdots + b_n x_n^*$. Aus der Definition von U^0 und der Definition der dualen Basis ergibt sich dann für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$:

$$0 = y^*(x_i) = b_1 x_1^*(x_i) + \cdots + b_n x_n^*(x_i) = b_i,$$

also ist $y^* = b_{m+1}x_1^* + \cdots + b_n x_n^* \in U'$.

Somit ist $U^0 = U'$, und da $\dim\, U^0 = \dim\, U' = n - m = \dim\, V - \dim\, U$ ist, folgt die Behauptung.

Alternative: Wir betrachten den Vektorraumhomomorphismus

$$\Phi: \quad V^* \;\to\; U^*, \quad x^* \;\mapsto\; x^*_{|U}$$

Dieser ist surjektiv und hat den Kern U^0. Daraus ergibt sich

$$\dim V^* \;=\; \dim \operatorname{Bild} \Phi \;+\; \dim \operatorname{Kern} \Phi \;=\; \dim U^* \;+\; \dim U^0.$$

Wegen $\dim V = \dim V^*$ und $\dim U = \dim U^*$ folgt

$$\dim V \;=\; \dim U \;+\; \dim U^0.$$

b)

$$\begin{aligned}
(U+W)^0 &= \{x^* \in V^* \mid x^*(y) = 0 \text{ für alle } y \in U+W\} \\
&= \{x^* \in V^* \mid x^*(u+w) = 0 \text{ für alle } u \in U, w \in W\} \\
&= \{x^* \in V^* \mid x^*(u) = 0 \text{ für alle } u \in U \,\text{und}\, x^*(w) = 0 \text{ für alle } w \in W\} \\
&= \{x^* \in V^* \mid x^* \in U^0, x^* \in W^0\} \\
&= U^0 \cap W^0.
\end{aligned}$$

Aufgabe I.5 (4 Punkte)
Gegeben sei die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und berechnen Sie

$$A^{10000} + A^{9999} - A^{9998}.$$

Lösung: Um zu zeigen, dass die Matrix A diagonalisierbar ist, bestimmen wir zunächst ihre Eigenwerte. Es bezeichne p das charakteristische Polynom von A.

$$p = \begin{array}{c} \begin{matrix} -1 & \qquad\qquad & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - X & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - X & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - X & X & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -X & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -X \end{vmatrix} \overset{+}{\hookleftarrow} = \begin{vmatrix} -X & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -X & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -X \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Entw. n. 2. Sp.}}{=} -X \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = -X(X^2 - 1) = -X(X-1)(X+1).$$

Also besitzt A drei verschiedene Eigenwerte, nämlich -1, 0 und 1, und ist damit diagonalisierbar.

Aus $p = -X^3 + X$ folgt mit Cayley-Hamilton $A^3 = A$, woraus sich aber direkt für alle $k \in \mathbb{N}$: $A^{2k} = A^2$ und $A^{2k+1} = A$ ergibt.

Somit ist

$$A^{10000} + A^{9999} - A^{9998} = A^2 + A - A^2 = A.$$

Alternative: A ist diagonalisierbar, also existiert eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} S^{-1}(A^{10000} - A^{9999} + A^{9998})S &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{10000} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{9999} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{9998} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir aber:

$$A^{10000} - A^{9999} + A^{9998} = S \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} S^{-1} = A.$$

Aufgabe I.6 (4 Punkte)
Es seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & 1+a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \dots & \dots & a_n \\ \vdots & a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^n a_i & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + \sum_{i=1}^n a_i$$

Mit $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = -1$ ergibt sich

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n\,(1 + n\cdot(-1)) = (-1)^{n+1}(n-1)$$

Aufgabe II.1 (4 Punkte)

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit der Eigenschaft $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Weiter sei

$$q = a_0 + a_1X + \cdots + a_rX^r \in \mathbb{C}[X]$$

ein Polynom.

Zeigen Sie, dass 0 der einzige Eigenwert von A ist, und berechnen Sie

$$\det(q(A)).$$

Lösung: Nach Voraussetzung gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, sodass X^k ein annullierendes Polynom von A ist. Damit ist das Minimalpolynom m der Matrix A ein Teiler von X^k, also von der Form $m = X^s$ für ein $s \in \{1, \ldots, k\}$. Das charakteristische Polynom von A muss damit $p = (-1)^nX^n$ sein. Es zerfällt in Linearfaktoren und 0 ist der einzige Eigenwert von A.

Die Jordan'sche Normalform $\tilde{A}$ von A ist somit von der Form

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ * & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & * & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die Einträge $*$ auf der ersten Nebendiagonalen entweder 0 oder 1 sind. Außerdem existiert eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit der Eigenschaft $\tilde{A} = S^{-1}AS$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \det(q(A)) &= \det(a_0E_n + a_1A + \cdots + a_rA^r) \\ &= \det(S^{-1})\det(a_0E_n + a_1A + \cdots + a_rA^r)\det(S) \\ &= \det(a_0S^{-1}S + a_1S^{-1}AS + \cdots + a_rS^{-1}A^rS) \\ &= \det(a_0E_n + a_1S^{-1}AS + a_2(S^{-1}AS)^2 + \cdots + a_r(S^{-1}AS)^r) \\ &= \det(a_0E_n + a_1\tilde{A} + a_2(\tilde{A})^2 + \cdots + a_r(\tilde{A})^r). \end{aligned}$$

Da lediglich die Einträge von $\tilde{A}$ unterhalb der Hauptdiagonalen von Null verschieden sind, gilt dies auch für alle Potenzen von $\tilde{A}$. Für $l \in \mathbb{N}$ ist $\tilde{A}^l$ also eine untere Dreiecksmatrix, deren Einträge auf der Hauptdiagonalen Null sind.

Damit ist $a_1\tilde{A} + a_2(\tilde{A})^2 + \cdots + a_r(\tilde{A})^r$ ebenfalls von dieser Form, also

$$a_0E_n + a_1\tilde{A} + a_2(\tilde{A})^2 + \cdots + a_r(\tilde{A})^r = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \ldots & \ldots & * & a_0 \end{pmatrix},$$

und man liest einfach ab: $\det(q(A)) = (a_0)^n$.

Aufgabe II.2 (4 Punkte)

Im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^5$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt) seien eine Gerade g und eine Ebene E durch

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$$

und

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$$

gegeben.

Berechnen Sie den Abstand $d(g, E)$ von g und E sowie $x_0 \in g$, $y_0 \in E$ derart, dass $\|x_0 - y_0\| = d(g, E)$ ist.

Lösung: Seien

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, u_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } u_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sowie $U := [u_1, u_2, u_3]$. Dann gilt: $d(g, E) = \|(x - y) - \pi_U(x - y)\|$.

Wir bestimmen also zunächst eine Orthonormalbasis in U:

$$\tilde{v}_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|u_1\|^2 = 6.$$

$$\tilde{v}_2 = u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \|u_2\|^2 = 9.$$

$$\tilde{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{9}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Also bilden

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}2\\4\\1\\0\\-3\end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von U.

$$x-y=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$\pi_U(x-y)=-\frac{2}{6}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{9}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\\2\end{pmatrix}+\frac{0}{30}\begin{pmatrix}2\\4\\1\\0\\-3\end{pmatrix}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}6\\4\\5\\0\\11\end{pmatrix}$$

und

$$\|(x-y)-\pi_U(x-y)\|=\|\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-3\\4\\-4\\9\\2\end{pmatrix}\|=\frac{1}{3}\sqrt{14}.$$

Also ist $d(g,E)=\frac{1}{3}\sqrt{14}$.

Um die Lotfußpunkte zu berechnen, setzt man an:

$$a\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\0\\-2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}=\Pi_U(x-y).$$

Durch Lösen des zugehörigen inhomogenen linearen Gleichungssystems erhält man als Lösung $a=\frac{1}{3}, b=-\frac{4}{9}$ und $c=0$.

Die Lotfußpunkte ergeben sich damit als

$$x_0=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\6\\2\\-3\\-2\end{pmatrix}$$

und

$$y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{9} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 10 \\ -18 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Alternative: Es müssen $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$x_0 = x + a_1 u_1 \quad \text{und} \quad y_0 = y + a_2 u_2 + a_3 u_3.$$

Laut Vorlesung gilt außerdem

$$x_0 - y_0 = x - y + a_1 u_1 - a_2 u_2 - a_3 u_3 \perp u_1, u_2, u_3.$$

Daraus ergeben sich die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} -2 + 6a_1 - 5a_3 &= 0 \\ -4 - 9a_2 - 3a_3 &= 0 \\ -3 + 5a_1 - 3a_2 - 6a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dies liefert als Lösung $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = -\frac{4}{9}$ und $a_3 = 0$, und man erhält:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und

$$y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{9} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 10 \\ -18 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Und $d(g, E)$ ergibt durch

$$\|x_0 - y_0\| = \|\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 10 \\ -18 \\ -8 \end{pmatrix} \| = \|\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \| = \frac{1}{3}\sqrt{14}.$$

Aufgabe II.3 (4 Punkte)

Es seien $n \geq 2$, V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $v \neq 0, w \neq 0$ Vektoren aus V. Ferner seien Endomorphismen $\Phi : V \to V$ und $\Psi : V \to V$ definiert durch

$$\Phi(x) = \langle x, v \rangle \, w \quad \text{bzw.} \quad \Psi(x) = \langle x, w \rangle \, v$$

für alle $x \in V$.

a) Zeigen Sie, dass $\Psi = \Phi^*$ ist.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von Φ und die zugehörigen Eigenräume.

c) Zeigen Sie: Φ ist selbstadjungiert $\iff v, w$ sind linear abhängig.

Lösung:

a) Für alle $x, y \in V$ gilt:
$\langle \Phi(x), y \rangle = \langle \langle x, v \rangle w, y \rangle = \langle x, v \rangle \langle w, y \rangle = \langle x, \langle y, w \rangle v \rangle = \langle x, \Psi(y) \rangle$
$\Rightarrow \Phi^* = \Psi$

b) (i) Bestimme $\operatorname{Kern} \Phi$:
$\Phi(x) = \langle x, v \rangle w = 0 \overset{w \neq 0}{\Leftrightarrow} \langle x, v \rangle = 0 \Leftrightarrow x \in [v]^\perp$
Wegen $\dim [v]^\perp = n - 1 \geq 1$ ist 0 Eigenwert von Φ mit Eigenraum $E_0 = \operatorname{Kern} \Phi = [v]^\perp$.

(ii) Sei $c \neq 0$ ein Eigenwert von Φ mit zugehörigem Eigenvektor $x \neq 0$.
$\Rightarrow c \cdot x = \Phi(x) = \langle x, v \rangle w \in [w]$
$\Rightarrow \exists\, a \in \mathbb{R} : \; x = aw$
$\Rightarrow cx = \langle x, v \rangle w = \langle aw, v \rangle w = \langle v, w \rangle \cdot aw = \langle v, w \rangle x$
$\Rightarrow c = \langle v, w \rangle$.

Wenn $\langle v, w \rangle \neq 0$ ist, so besitzt Φ noch den Eigenwert $\langle v, w \rangle$. Der zugehörige Eigenraum ist $E_{\langle v, w \rangle} = [w]$.

c) $\Rightarrow$: Ist Φ selbstadjungiert, so gilt für jedes $x \in V$:
$\langle x, v \rangle w = \Phi(x) = \Phi^*(x) \overset{a)}{=} \Psi(x) = \langle x, w \rangle v$
Speziell für $x = v$ erhält man $\langle v, v \rangle w = \langle v, w \rangle v$.
Wegen $\langle v, v \rangle \neq 0$ sind v, w linear abhängig.

$\Leftarrow$: Sind v, w linear abhängig, so existiert wegen $w \neq 0$ ein $a \in \mathbb{R}$ mit $w = av$.
$\Rightarrow \forall\, x \in V : \; \Phi(x) = \langle x, v \rangle w = \langle x, v \rangle av = \langle x, av \rangle v = \langle x, w \rangle v = \Psi(x)$
$\Rightarrow \Phi = \Psi \overset{a)}{=} \Phi^*$

Aufgabe II.4 (4 Punkte)

Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Isometrie bezüglich des Standardskalarproduktes mit $\det \Phi = 1$. Weiter gelte

$$\Phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad \Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{6} \\ 2+\sqrt{6} \\ -2+2\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Drehachse und die Drehebene sowie die euklidische Normalform $\tilde{A}$ von Φ.

Lösung: Es seien $U \subset \mathbb{R}^3$ die Drehebene von Φ, $[v] \subset \mathbb{R}^3$ die Drehachse und $\omega \in [0, \pi]$ der Drehwinkel.

$\det \Phi = 1 \Rightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}^3 :\ \Phi(x) - x \in U$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} \in U,\ \tfrac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2+\sqrt{6} \\ 2+\sqrt{6} \\ -2+2\sqrt{6} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{6}-2 \\ \sqrt{6}-2 \\ 2\sqrt{6}+2 \end{pmatrix} \in U.$$

Da diese beiden Vektoren linear unabhängig sind, spannen sie U auf, es ist also

$$U = [\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}, \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{6}-2 \\ \sqrt{6}-2 \\ 2\sqrt{6}+2 \end{pmatrix}] = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}].$$

$$\Rightarrow [v] = U^\perp = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}], \quad v := \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Orthogonalprojektion von $x := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf U ist:

$$\tilde{x} := x - \tfrac{\langle x,v\rangle}{\langle v,v\rangle} \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Phi(\tilde{x}) = \Phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) + \tfrac{1}{2} \cdot \Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \tfrac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \cos \omega = \tfrac{\langle \tilde{x}, \Phi(\tilde{x})\rangle}{\|\tilde{x}\| \|\Phi(\tilde{x})\|} = \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe II.5 (4 Punkte)

Es seien V ein n-dimensionaler unitärer Vektorraum und $\Phi : V \to V$ ein Endomorphismus mit $\Phi^2 = \Phi^*$. Zeigen Sie, dass Φ^3 eine Orthogonalprojektion ist.

Lösung: Nach Voraussetzung gilt

$$\Phi \circ \Phi^* = \Phi \circ \Phi^2 = \Phi^3 = \Phi^2 \circ \Phi = \Phi^* \circ \Phi,$$

und damit ist Φ ein normaler Endomorphismus.
Es gibt also nach dem Spektralsatz eine Orthonormalbasis $\{u_1, \ldots, u_n\}$ von V aus Eigenvektoren von Φ:

$$\Phi(u_i) = c_i\, u_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Für den adjungierten Endomorphismus Φ^* gilt dann:

$$\Phi^*(u_i) = \overline{c_i}\, u_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Aus $\Phi^2 = \Phi^*$ ergibt sich dann für die Eigenwerte $c_i,\ 1 \leq i \leq n$, die Bedingung

$$c_i^2 = \overline{c_i}.$$

Es folgt

$$|c_i|^2 = |c_i^2| = |\overline{c_i}| = |c_i|,$$

und das bedeutet, dass die Eigenwerte von Φ entweder Betrag 0 oder Betrag 1 haben.
Für jede komplexe Zahl c vom Betrag 1 gilt aber $c^{-1} = \overline{c}$. Insbesondere gilt für alle c_i

$$c_i^3 = c_i^2 \cdot c_i = \overline{c_i} \cdot c_i \in \{0, 1\}.$$

Das zieht nach sich, dass alle Eigenwerte des normalen Endomorphismus Φ^3 in $\{0, 1\}$ liegen. Damit ist Φ^3 eine orthogonale Projektion.

Aufgabe II.6 (4 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ sei für $a \in \mathbb{R}$ eine affine Abbildung φ gegeben durch

$$\varphi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 & a-1 & 2 \\ 0 & a-2 & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie a derart, dass φ genau einen Fixpunkt und genau zwei Fixgeraden besitzt.

Lösung: φ besitzt genau dann genau einen Fixpunkt, wenn $A - E$ regulär ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn sowohl $a \neq 3$ als auch $a \neq 1$ gilt.
Eine Gerade g ist in diesem Fall genau dann eine Fixgerade, wenn sie durch den eindeutig bestimmten Fixpunkt geht und ihr Richtungsvektor ein Eigenvektor von A ist. Die Eigenwerte von A sind $c_1 = 3, c_2 = a - 2, c_3 = a$. Wegen $a \neq a - 2$ müssen mindestens zwei verschiedene Eigenwerte auftreten. Der Fall $a = 3$ darf nicht aufteten, da dann φ nach dem obigen mehr als einen Fixpunkt hätte. Somit bleibt nur der Fall $a - 2 = 3$ übrig, d.h. $a = 5$. Die Eigenräume zu den Eigenwerten 3 und 5 sind jeweils eindimensional. Somit gibt es genau für $a = 5$ genau einen Fixpunkt und genau zwei Fixgeraden, die dann durch diesen Fixpunkt gehen müssen.