I.1 (4 Punkte)

Gegeben sei die reelle Matrix
$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Menge
$$U := \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \,|\, A^\top BA = B\}$$
eine Untergruppe von $GL(\mathbb{R}^3)$, der Gruppe der regulären 3×3-Matrizen, ist.

b) Geben Sie ein Element $A \in U$ an, das nicht Diagonalgestalt besitzt. Zeigen Sie, dass U nicht abelsch ist.

Lösung:

a) Zunächst müssen wir zeigen, dass U überhaupt eine Teilmenge von $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$ ist. Dafür erinnern wir uns an den Determinantenmultiplikationssatz und schreiben für ein beliebiges $A \in U$:
$$-1 = \det(B) = \det(A^\top BA) = -\det(A)^2.$$
Wir sehen, dass $\det A \neq 0$, also A invertierbar ist.

U ist auch nicht leer, denn die 3×3-Einheitsmatrix ist in U enthalten.

Es bleibt zu zeigen, dass mit $A, \tilde{A} \in U$ auch $A\tilde{A}^{-1}$ in U liegt. (Wegen $U \subset \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$ gibt es überhaupt ein Inverses zu $\tilde{A}$.) Wir überprüfen die Bedingung:
$$(A\tilde{A}^{-1})^\top B(A\tilde{A}^{-1}) = (\tilde{A}^{-1})^\top (A^\top BA)\tilde{A}^{-1} \overset{A\in U}{=} (\tilde{A}^{-1})^\top B\tilde{A}^{-1} \overset{\tilde{A}\in U}{=} (\tilde{A}^{-1})^\top (\tilde{A}^\top B\tilde{A})\tilde{A}^{-1} = B.$$
Damit ist gezeigt, dass auch $A\tilde{A}^{-1}$ in U liegt und dem Untergruppenkriterium genüge getan.

b) Wir wählen für die Matrix A zunächst die folgende Blockform $A = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{C}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & \gamma \end{array}\right)$. Die definierende Eigenschaft von U liefert uns die folgenden Bedingungen für die 2×2-Matrix C und für $\gamma \in \mathbb{R}$, nämlich
$$C^\top C = E \text{ und } -\gamma^2 = -1\ .$$
Das bedeutet, dass Matrizen dieser Bauart genau dann zu U gehören falls $\gamma = \pm 1$ und C orthogonal ist: $C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \mp\sin\varphi \\ \sin\varphi & \pm\cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$

Eine Nichtdiagonalmatrix aus U wäre damit zum Beispiel $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mit der Diagonalmatrix $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$ rechnet man jetzt leicht nach
$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_2 \cdot A_1,$$
woraus folgt, dass U nicht abelsch ist.

I.2 (4 Punkte)

Seien V, W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Weiter seien U_1 und U_2 Untervektorräume von V und $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung.

a) Zeigen Sie für **injektives** Φ die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

   (i) $U_1 + U_2$ ist direkt.

   (ii) $\Phi(U_1) + \Phi(U_2)$ ist direkt.

b) Gegeben sei der Endomorphismus

$$\Phi \,:\, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für diese Abbildung beide Richtungen der obigen Äquivalenz falsch sind, indem Sie jeweils geeignete Untervektorräume U_1, U_2 von $\mathbb{R}^2$ angeben.

Lösung:

a) „(i)$\Rightarrow$ (ii)“: Sei also $U_1 + U_2$ direkt, d. h. $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Nehmen wir an, $\Phi(U_1) + \Phi(U_2)$ sei nicht direkt, es gebe also ein $x \in \Phi(U_1) \cap \Phi(U_2)$, $x \neq 0$. Dieses x ließe sich dann schreiben als $x = \Phi(u_1) = \Phi(u_2)$ mit $u_1 \in U_1 \setminus \{0\}$ und $u_2 \in U_2 \setminus \{0\}$. Das wäre ein Widerspruch zur Injektivität von Φ, so dass die Summe $\Phi(U_1) + \Phi(U_2)$ direkt sein muss.

„(ii)$\Rightarrow$ (i)“: Sein nun $\Phi(U_1)+\Phi(U_2)$ direkt, also $\Phi(U_1)\cap\Phi(U_2) = \{0\}$. Dann muss auch das darin enthaltene $\Phi(U_1 \cap U_2) = \{0\}$ sein. Das heißt aber, dass $U_1 \cap U_2$ im Kern von Φ liegt. Letzterer besteht aufgrund der Injektivität von Φ nur aus der Null, so dass auch $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ gilt, also ist $U_1 + U_2$ direkt.

b) $[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}] + [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}]$ ist direkt, aber nicht $\Phi([\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]) + \Phi([\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}]) = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}] + [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}]$.

$\mathbb{R}^2 + [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$ ist nicht direkt, aber $\Phi(\mathbb{R}^2) + \Phi([\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}]) = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}] + \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ sehr wohl.

I.3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die die lineare Abbildung

$$\Phi_\alpha : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3,\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 - x_5 \\ x_1 + x_2 + \alpha^2 x_3 + \alpha x_4 - 6x_5 \end{pmatrix}$$

surjektiv ist, und bestimmen Sie für diese Parameter den Kern der zugehörigen Abbildung.

Lösung:

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha^2 & \alpha & -6 \end{pmatrix} = \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & \alpha^2 & \alpha & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -12 & -4 & 17 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha-2 & 0 \end{pmatrix} \quad | -1 \quad = \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 12 & 4 & -17 \\ 0 & 0 & \alpha^2-4 & \alpha-2 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun gilt

$$\Phi_\alpha \text{ ist surjektiv} \iff \dim \operatorname{Bild}(\Phi_\alpha) = 3 \iff \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha^2 & \alpha & -6 \end{pmatrix} = 3 \iff \alpha \neq 2$$

Für die Bestimmung von $\operatorname{Kern}(\Phi_\alpha)$ für $\alpha \neq 2$ können wir von der obigen vereinfachten Matrix ausgehen, da nur Zeilenumformungen für die Rangbestimmung verwendet wurden. Mit weiteren Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 12 & 4 & -17 \\ 0 & 0 & \alpha+2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\alpha-4 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 4-4\alpha & 0 & -17 \\ 0 & 0 & \alpha+2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\operatorname{Kern}(\Phi_\alpha) = \left[\begin{pmatrix} 4-2\alpha \\ 4\alpha-4 \\ 1 \\ -2-\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ 17 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

I.4 (4 Punkte)

Seien V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und $\psi \in V^*$ eine von der Nullabbildung verschiedene Linearform. Weiter sei $\Phi : V \to V$ ein Endomorphismus von V mit der Eigenschaft

$$\psi \circ \Phi = \psi.$$

Zeigen Sie:

a) Φ besitzt den Eigenwert 1.

b) Ist W ein Untervektorraum von V mit $V = \mathrm{Kern}\,(\psi) \oplus W$ und $\Phi(W) \subset W$, so wird W von einem Eigenvektor zum Eigenwert 1 erzeugt.

Lösung:

a) Es gilt:

$$1 \text{ ist Eigenwert von } \Phi \Leftrightarrow \mathrm{Kern}(\Phi - \mathrm{id}) \neq \{o\} \Leftrightarrow \Phi - \mathrm{id} \text{ ist } \textbf{nicht} \text{ injektiv}$$

Wegen $\dim V = n$ ist dies äquivalent dazu, dass $\Phi - \mathrm{id}$ nicht bijektiv ist.
Aus der Beziehung

$$\psi \circ \Phi = \psi = \psi \circ \mathrm{id}$$

folgern wir

$$\psi \circ (\Phi - \mathrm{id}) = 0.$$

Wäre $\Phi - \mathrm{id}$ bijektiv, so folgte $\psi = 0$, ein Widerspruch zur Voraussetzung. Die Abbildung $\Phi - \mathrm{id}$ ist somit nicht injektiv und 1 ist dann ein Eigenwert von Φ.

b) Sei W ein Φ-invarianter Komplementärraum zu $U := \mathrm{Kern}(\psi)$. Wegen $\dim U = n - 1$ folgt aus dem Dimensionssatz $\dim W = 1$. Sei $W = [w]$, $w \neq o$. Wegen $\Phi(W) \subset W$ gilt dann $\Phi(w) = c \cdot w$. Es bleibt zu zeigen, dass w ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist, d.h. $c = 1$. Es gilt aber einerseits

$$\psi \circ \Phi(w) = \psi(c \cdot w) = c\psi(w)$$

und andererseits

$$\psi \circ \Phi(w) = \psi(w),$$

also

$$\psi(w) = c\psi(w).$$

Da w nicht in $\mathrm{Kern}(\psi)$ enthalten ist, gilt $\psi(w) \neq 0$ und wir erhalten $c = 1$.

I.5 (4 Punkte)

Seien V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, Φ ein Endomorphismus von V und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ zwei verschiedene Eigenwerte von Φ mit den zugehörigen Eigenräumen E_λ bzw. E_μ. Zeigen Sie:

$$\text{Kern}\,((\Phi - \lambda\,\text{id}) \circ (\Phi - \mu\,\text{id})) = E_\lambda + E_\mu\ .$$

Lösung:

Der Kürze halber bezeichnen wir den Kern von $(\Phi - \lambda\text{id}) \circ (\Phi - \mu\text{id})$ mit W.

Wir zeigen zwei Inklusionen.

Erste Inklusion: $E_\lambda + E_\mu \subset W$

Für $v \in E_\lambda$ gilt $\Phi(v) = \lambda \cdot v$, und folglich

$$\begin{aligned}\big((\Phi - \lambda\text{id}) \circ (\Phi - \mu\text{id})\big)(v) &= \big(\Phi - \lambda\text{id}\big)(\Phi(v) - \mu \cdot v)\\ &= \big(\Phi - \lambda\text{id}\big)(\lambda v - \mu v)\\ &= \big(\Phi - \lambda\text{id}\big)((\lambda - \mu) \cdot v)\\ &= (\lambda - \mu) \cdot \big(\Phi - \lambda\text{id}\big)(v) = 0.\end{aligned}$$

Das zeigt $E_\lambda \subset W$.

Für $v \in E_\mu$ gilt $\Phi(v) = \mu \cdot v$, und folglich

$$\begin{aligned}\big((\Phi - \lambda\text{id}) \circ (\Phi - \mu\text{id})\big)(v) &= \big(\Phi - \lambda\text{id}\big)(\Phi(v) - \mu \cdot v)\\ &= \big(\Phi - \lambda\text{id}\big)(\mu v - \mu v)\\ &= \big(\Phi - \lambda\text{id}\big)(0) = 0.\end{aligned}$$

Das zeigt $E_\mu \subset W$, und damit insgesamt $E_\lambda + E_\mu \subset W$, da die Summe der kleinste Untervektorraum von V ist, der die Summanden enthält.

Zweite Inklusion: $W \subset E_\lambda + E_\mu$

Für $w \in W$ ist $(\Phi - \lambda\text{id})(\Phi(w) - \mu \cdot w) = 0$, also $\Phi(w) - \mu \cdot w \in E_\lambda$. Also gilt

$$(*) \quad \Phi(w) - \mu w = x \in E_\lambda$$

Wegen $(\Phi - \lambda\text{id}) \circ (\Phi - \mu\text{id}) = \Phi^2 - \lambda\Phi - \mu\Phi + \lambda\mu \cdot \text{id} = (\Phi - \mu\text{id}) \circ (\Phi - \lambda\text{id})$ ist analog auch $\Phi(w) - \lambda \cdot w \in E_\mu$. Dies bedeutet

$$(**) \quad \Phi(w) - \lambda w = y \in E_\mu$$

Aus $(**) - (*)$ ergibt sich $(\lambda - \mu)w = x - y \in E_\lambda + E_\mu$. Wegen $\lambda - \mu \neq 0$ gilt damit

$$w = \frac{1}{\lambda - \mu}\,x - \frac{1}{\lambda - \mu}\,y \in E_\lambda + E_\mu$$

I.6 (4 Punkte)

Sei V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner gleich 3. Durch

$$\begin{aligned}\Phi(1-x+x^2) &= -6x+3x^2+2x^3,\\ \Phi(x) &= 1+7x,\\ \Phi(x^2-3x^3) &= -7x^3,\\ \Phi(x^3) &= x^2+3x^3\end{aligned}$$

sei ein Endomorphismus $\Phi : V \to V$ definiert. Berechnen Sie $\det \Phi$.

Lösung:

Wir bestimmen zunächst die Abbildungsmatrix A von Φ bezüglich der (geordneten) Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ von V:

$$\begin{aligned}\Phi(x^2) &= \Phi(x^2-3x^3)+3\Phi(x^3) = 3x^2+2x^3,\\ \Phi(1) &= \Phi(1-x-x^2)+\Phi(x)-\Phi(x^2) = 1+x.\end{aligned}$$

Es gilt somit:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 7 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$\det \Phi = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & 7\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix} = 6 \cdot 7 = 42.$$

II.1 (4 Punkte)

Gegeben sei eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Rang von A die Jordan'sche Normalform der $2n\times 2n$-Matrix
$$M := \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ A & 0_n \end{pmatrix},$$
wobei mit 0_n die Nullmatrix der Größe $n \times n$ bezeichnet sei.

b) Sei nun A regulär. Geben Sie eine reguläre $2n \times 2n$-Matrix S an, so dass $S^{-1}MS$ Jordan'sche Normalform hat.

Lösung: Wie üblich sei für $1 \le i \le 2n$ der i-te Standardbasisvektor von $\mathbb{C}^{2n}$ mit e_i bezeichnet. Wir bezeichnen mit $\widetilde{M}$ die Jordan'sche Normalform von M und halten fest, dass der Rang von M gleich dem Rang von A ist.

a) Da M eine Dreiecksmatrix ist, die auf der Diagonale nur Nullen als Einträge hat, ist 0 der einzige Eigenwert, und $\widetilde{M}$ hat nur Jordankästchen zum Eigenwert 0. Es gibt $2n - \text{Rang}(M) = 2n - \text{Rang}(A)$ Jordankästchen.

Um die Länge des längsten Jordankästchens zu bekommen, müssen wir Potenzen von M kennen. Es gilt
$$M^2 = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ A & 0_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ A & 0_n \end{pmatrix} = 0_{2n} = M^3.$$
Daher ist $\text{Rang}(M^2) = \text{Rang}(M^3)$, und es gibt in $\widetilde{M}$ keine Jordankästchen, deren Länge größer als 2 ist.

Da 0 der einzige Eigenwert von M ist, hat ein Jordankästchen der Länge 1 den Rang 0, und eines der Länge 2 hat den Rang 1. Da der Rang von $\widetilde{M}$ gleich dem Rang von M ist, gibt es $\text{Rang}(A)$ Jordankästchen der Länge 2 und $2n - 2\text{Rang}(A)$ Jordankästchen der Länge 1.

Konkreter heißt das: Für $1 \le i \le \text{Rang}(A)$ ist die $(2i-1)$-te Spalte von $\widetilde{M}$ der Vektor e_{2i}, und alle anderen Spalten von $\widetilde{M}$ sind 0:
$$\widetilde{M} = (\underbrace{e_2\ 0\ e_4\ 0\ e_6\ 0 \dots e_{2\text{Rang}(A)}\ 0}_{\textit{Kästchen der Länge } 2}\ \overbrace{0 \dots 0}^{\textit{Länge } 1}).$$

b) Aus a) wissen wir, dass $\widetilde{M} = (e_2\ 0\ e_4\ 0\ e_6\ 0 \dots e_{2n}\ 0)$ aus n Jordankästchen der Länge 2 besteht.

Eine Matrix $S = (s_1 \dots s_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$ ist also dann eine mögliche Basiswechselmatrix, wenn sie regulär ist und die Bedingungen
$$\forall 1 \le i \le n : M \cdot s_{2i-1} = s_{2i} \quad \text{und} \quad M \cdot s_{2i} = 0$$
erfüllt. Für jedes i folgt hierbei wegen $M^2 = 0$ die zweite Bedingung aus der ersten: $M \cdot s_{2i} = M^2 \cdot s_{2i-1} = 0$.

Für $1 \le i \le n$ sei $b_i := M \cdot e_i$. Das ist die i-te Spalte von M.

Da A regulär ist, ist $\text{Rang}(M) = n$, und damit $\{b_1, \dots, b_n\}$ linear unabhängig.

Auch $\{e_1, \dots, e_n\}$ ist linear unabhängig. Da $\{b_1, \dots, b_n\}$ in dem von $\{e_{n+1}, \dots, e_{2n}\}$ erzeugten Untervektorraum von $\mathbb{C}^{2n}$ liegt, ist die Vereinigung $\{e_1, \dots, e_n, b_1, \dots, b_n\}$ linear unabhängig. Daher ist die Matrix
$$S := (e_1\ b_1\ e_2\ b_2\ \dots e_n\ b_n) \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$$
invertierbar. Nach Konstruktion gilt $\widetilde{M} = S^{-1} \cdot M \cdot S$.

II.2 (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Skalarprodukte $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, so dass für die Standardbasis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die folgenden Eigenschaften gelten:

(i) $||e_1|| = \sqrt{3}$, $||e_2|| = 1$, $||e_3|| = 2$.

(ii) Der Winkel zwischen e_1 und e_2 ist $\frac{\pi}{4}$ und der Winkel zwischen e_2 und e_3 ist $\frac{\pi}{2}$.

Dabei bezeichnen wir mit $||x|| := \sqrt{F(x,x)}$ die von dem Skalarprodukt F induzierte Norm.
Hinweis: $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Lösung:

Bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ können wir F schreiben als

$$F(x,y) = x^\top Ay$$

mit einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

F ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn A symmetrisch und positiv definit ist.

$\|e_1\| := \sqrt{e_1^\top Ae_1} = \sqrt{a_{11}}$. Also muss $a_{11} = 3$ gelten. Analog ergibt sich $a_{22} = 1$ und $a_{33} = 4$.

Weiter soll gelten $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{e_1^\top Ae_2}{\sqrt{3}} = \frac{a_{12}}{\sqrt{3}}$. Also muss $a_{12} = \frac{\sqrt{6}}{2} = a_{21}$ gelten (A soll symmetrisch sein). Analog ergibt sich $a_{23} = a_{32} = 0$.

Also muss A von der Form

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{\sqrt{6}}{2} & a \\ \frac{\sqrt{6}}{2} & 1 & 0 \\ a & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$ sein. Dabei muss a so gewählt werden, dass A positiv definit ist. Ein Satz aus der Vorlesung besagt nun, dass A genau dann postiv definit ist, wenn alle Hauptunterdeterminanten echt grösser als Null sind. Die ersten beiden Hauptunterdeterminanten sind 3 und $3 - (\frac{\sqrt{6}}{2})^2 = \frac{3}{2}$. Also ist A genau dann postiv definit, wenn $\det A > 0$ ist.

Es ist $\det A = 6 - a^2$. Also ist A genau dann postiv definit, wenn $a \in (-\sqrt{6}, \sqrt{6})$ ist.

II.3 (4 Punkte)

Sei A eine reelle, symmetrische, positiv definite $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie:

a) A und A^2 haben die gleiche Anzahl von Eigenwerten.

b) Jeder Eigenvektor von A ist auch Eigenvektor von A^2 und umgekehrt.

c) Für reelle symmetrische Matrizen A sind die Aussagen in a) und b) im Allgemeinen falsch.

Lösung:

a) A ist symmetrisch, also existiert eine orthogonale Matrix S, sodass $\tilde{A} := S^\top AS$ eine zu A ähnliche Diagonalmatrix ist. Die Elemente auf der Hauptdiagonalen wollen wir mit $c_1, \dots, c_n$ bezeichnen.

$\tilde{A}^2 = (S^\top AS)^2 = S^\top A^2 S$ ist ebenfalls eine Diagonalmatrix und zu A^2 ähnlich. Die Einträge auf der Hauptdiagonalen sind $c_1^2, \dots, c_n^2$. Da A positiv definit ist, gilt $c_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$. Daraus erhalten wir aber

$$c_i^2 = c_j^2 \quad \Leftrightarrow \quad c_i = c_j. \quad (*)$$

Auf der Hauptdiagonale von $\tilde{A}$ beziehungsweise $\tilde{A}^2$ stehen aber gerade die Eigenwerte von A beziehungsweise A^2, und wegen $(*)$ ist deren Anzahl gleich.

b) Es seien $c_1, \dots, c_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A und $E_{c_1}, \dots, E_{c_k}$ die zugehörigen Eigenräume. Dann sind, wie wir in *a)* gesehen haben, $c_1^2, \dots, c_k^2$ die Eigenwerte von A^2. Die zugehörigen Eigenräume wollen wir mit $E_{c_1^2}, \dots, E_{c_k^2}$ bezeichnen.

Es sei $i \in \{1, \dots, k\}$ beliebig. Ist x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert c_i, so gilt $A^2 x = c_i^2 x$. Somit ist $E_{c_i} \subset E_{c_i^2}$ und insbesondere $\dim E_{c_i} \leq \dim E_{c_i^2}$.

Angenommen, es existiert ein $j \in \{1, \dots, k\}$ mit $E_{c_j} \subsetneq E_{c_j^2}$. Dann gilt, weil sowohl A als auch A^2 diagonalisierbar sind:

$$n = \sum_{i=1}^{k} \dim E_{c_i} < \sum_{i=1}^{k} \dim E_{c_i^2} = n.$$

Also muss $E_{c_i} = E_{c_i^2}$ für $i = 1, \dots, k$ gelten.

c) Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sind sowohl *a)* als auch *b)* falsch.

II.4 (4 Punkte)

Sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Isometrie des euklidischen Standardvektorraums $\mathbb{R}^3$ mit $\det \Phi = -1$.

a) Zeigen Sie, dass Φ den Eigenwert -1 besitzt und dass für jeden Eigenvektor v zum Eigenwert -1 gilt:
$$\forall x \in \mathbb{R}^3 : \ v \perp (\Phi(x) + x).$$

b) Es gelte zusätzlich
$$\Phi(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}\sqrt{2}+2\\ \sqrt{2}-2\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}, \quad \Phi(\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+12\\ 6\sqrt{2}-2\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie die euklidische Normalform von Φ.

Lösung: a) Es gibt in $\mathbb{R}^3$ eine ONB, bzgl. der Φ die Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$ mit $\epsilon \in \{1, -1\}$ und $\omega \in [0, \pi]$ hat. Mit $\det \Phi = -1$ ist auch $\det A = -1$, also gilt: $\epsilon = -1$. A (und damit auch Φ) hat also den Eigenwert -1.

Sei v ein Eigenvektor von Φ zum Eigenwert -1, d.h. $\Phi(v) = -v$, $v \neq 0$. Aus
$$\langle v, \Phi(x) + x\rangle = \langle v, x\rangle + \langle v, \Phi(x)\rangle = \langle \Phi(v), \Phi(x)\rangle + \langle v, \Phi(x)\rangle = -\langle v, \Phi(x)\rangle + \langle v, \Phi(x)\rangle = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$
folgt $v \perp (\Phi(x) + x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}^3$.

b) Verwende a), um den Eigenraum zum Eigenwert -1 zu bestimmen.

$v \in E_{-1} \Rightarrow \langle v, \Phi(y_i) + y_i\rangle = 0$ für $i = 1, 2$ und $y_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $y_2 = \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \langle v, \begin{pmatrix}\sqrt{2}+3\\ \sqrt{2}\\ \sqrt{2}+3\end{pmatrix}\rangle = 0 \ \wedge \ \langle v, \frac{1}{4}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+8\\ 6\sqrt{2}+10\\ \sqrt{2}+8\end{pmatrix}\rangle = 0 \ \Rightarrow \ v = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ ist eine Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}+3 & \sqrt{2} & \sqrt{2}+3 \\ \sqrt{2}+8 & 6\sqrt{2}+10 & \sqrt{2}+8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sqrt{2}+3 & \sqrt{2} & \sqrt{2}+3 \\ 5 & 5\sqrt{2}+10 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -8-4\sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2}+2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v \in [\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}].$$

Bestimme nun den Drehwinkel $\omega = \measuredangle(y, \Phi(y))$ für $y \in [v]^\perp$.
$$y = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{2}(-2)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} \perp v,$$
$$\Phi(y) = \Phi(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}) + \Phi(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}\sqrt{2}+2\\ \sqrt{2}-2\\ \sqrt{2}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\ \sqrt{2}-2\\ \sqrt{2}+1\end{pmatrix},$$
$$\cos\measuredangle(y, \Phi(y)) = \frac{\langle y, \Phi(y)\rangle}{\|x\| \, \|\Phi(y)\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
Somit lautet die euklidische Normalform von Φ
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

II.5 (4 Punkte)

Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ und Φ ein Endomorphismus von V mit der Eigenschaft

$$\forall x \in V : \langle x, \Phi(x) \rangle = 0.$$

Zeigen Sie:

a) Ist V ein **euklidischer** Vektorraum, so gilt:

  i) $\Phi^* = -\Phi$. Dabei bezeichnet Φ^* die Adjungierte von Φ.

  ii) Ist U ein Φ-invarianter Untervektorraum von V, so ist $U^\perp$ auch Φ-invariant.

  iii) Wenn Φ einen Eigenwert besitzt, so ist Φ nicht invertierbar.

b) Ist V ein **unitärer** Vektorraum, so ist Φ die Nullabbildung.

Lösung:

a)

i) Es ist $\Phi^* = -\Phi$, genau dann, wenn für alle $x, y \in V$ gilt: $\langle \Phi(x), y) \rangle = -\langle x, \Phi(y) \rangle$. Dies folgt im euklidischen Fall für alle $x, y \in V$ aus

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Phi(x+y), x+y \rangle = \langle \Phi(x), x \rangle + \langle \Phi(y), x \rangle + \langle \Phi(x), y \rangle + \langle \Phi(y), y \rangle \\ &= \langle \Phi(x), y \rangle + \langle \Phi(y), x \rangle = \langle \Phi(x), y \rangle + \langle x, \Phi(y) \rangle \end{aligned}$$

ii) Es sei $v \in U^\perp$. Zu zeigen ist, dass $\Phi(v) \in U^\perp$ gilt.

$$\forall u \in U \, : \, \langle u, \Phi(v) \rangle = -\langle \underbrace{\Phi(u)}_{\in U}, v \rangle = 0, \qquad \text{also } \Phi(v) \in U^\perp.$$

iii) Ist λ Eigenwert von Φ und $x \neq 0$ ein zugehöriger Eigenvektor, so gilt

$$0 = \langle x, \Phi(x) \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle \text{ , also } \lambda = 0.$$

Damit ist $\operatorname{Kern} \Phi \neq \{0\}$ und Φ nicht invertierbar.

b) Analog zu a)i) gilt auch im unitären Fall

$$\forall x, y \in V : \quad 0 \quad = \quad \langle \Phi(x), y \rangle + \langle \Phi(y), x \rangle \tag{1}$$

Ersetzt man hier den Vektor x durch ix, erhält man weiter

$$\forall x, y \in V : 0 = \langle \Phi(ix), y \rangle + \langle \Phi(y), ix \rangle = i(\langle \Phi(x), y \rangle - \langle \Phi(y), x \rangle)$$

also

$$\forall x, y \in V : \quad 0 \quad = \quad \langle \Phi(x), y \rangle - \langle \Phi(y), x \rangle \tag{2}$$

Addition von (1) und (2) ergibt

$$\forall x, y \in V : \quad 0 \quad = \quad \langle \Phi(x), y \rangle.$$

Wählt man $y := \Phi(x)$, so ergibt sich

$$\forall x \in V : \quad 0 \quad = \quad \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \Phi(x) = 0\,.$$

Damit gleichbedeutend ist, dass Φ die Nullabbildung ist.

II.6 (4 Punkte)

Im reellen dreidimensionalen affinen Raum $\mathbb{R}^3$ sei eine Quadrik Q gegeben durch

$$Q \quad : \quad x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0.$$

Bestimmen Sie die affine Normalform $\widetilde{Q}$ von Q und geben Sie eine Affinität φ an, die Q auf $\widetilde{Q}$ abbildet.

Lösung:

$$\begin{aligned} 0 &= x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3 + 1)^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - 8x_2x_3 + 2x_3 - 1 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3 + 1)^2 - 2(x_2 + 2x_3)^2 + 7x_3^2 + 2x_3 - 1 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3 + 1)^2 - 2(x_2 + 2x_3)^2 + 7(x_3 + \frac{1}{7})^2 - \frac{8}{7} \end{aligned}$$

$$\iff \quad \underbrace{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x_2 + \sqrt{7}x_3\right)^2}_{\overline{x}_1} - \underbrace{\left(\frac{\sqrt{14}}{4}x_1 + \frac{\sqrt{14}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{14}}{4}x_3 + \frac{\sqrt{14}}{4}\right)^2}_{\overline{x}_2} - \underbrace{\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}x_3 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}_{\overline{x}_3} + 1 = 0$$

Damit ist die Normalform $\tilde{\mathcal{Q}}$ von $\mathcal{Q}$ gegeben durch

$$\tilde{\mathcal{Q}} \, : \, \overline{x}_1^2 - \overline{x}_2^2 - \overline{x}_3^2 + 1 = 0\,.$$

Nach Vorlesung handelt es sich damit bei $\mathcal{Q}$ um ein **einschaliges Hyperboloid**. Eine Affinität, die $\mathcal{Q}$ auf $\tilde{\mathcal{Q}}$ abbildet ist nach obiger Rechung durch

$$\varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{7}}{2} & \sqrt{7} \\ \frac{\sqrt{14}}{4} & \frac{\sqrt{14}}{2} & \frac{\sqrt{14}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{7\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{14}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \quad , \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

gegeben.