I.1 (4 Punkte)

Es seien $(G, *)$ eine Gruppe mit neutralem Element e_G und $(H, \cdot)$ eine weitere Gruppe.

a) Geben Sie die Definition eines Gruppenhomomorphismus $\Phi : G \longrightarrow H$ an und beweisen Sie, dass für solch einen Gruppenhomomorphismus $\Phi(e_G)$ das neutrale Element von H ist.

b) Nun besitze G die Eigenschaft, dass für alle $g \in G$ eine ungerade natürliche Zahl n existiert mit $g^n = e_G$.

   Zeigen Sie, dass es keinen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\Phi : G \longrightarrow \{1, -1\}$ gibt.

Lösung:

a) Ein Gruppenhomomorphismus von G nach H ist eine Abbildung $\Phi : G \longrightarrow H$, sodass für alle $g_1, g_2 \in G$ die Gleichung

$$\Phi(g_1 * g_2) = \Phi(g_1) \cdot \Phi(g_2)$$

   gilt.

   Insbesondere gilt dann für $g_1 = g_2 = e_G$

$$\Phi(e_G) = \Phi(e_G * e_G) = \Phi(e_G) \cdot \Phi(e_G),$$

   und durch Multiplikation dieser Gleichung mit dem in H inversen zu $\Phi(e_G)$ folgt

$$e_H = \Phi(e_G)^{-1} \cdot \Phi(e_G) = \Phi(e_G)^{-1} \cdot (\Phi(e_G) \cdot \Phi(e_G)) = \Phi(e_G).$$

   Dabei bezeichnet e_H das neutrale Element in H.

b) Es sei $\Phi : G \longrightarrow \{1, -1\}$ ein Gruppenhomomorphismus. Weiter sei $g \in G$ beliebig und n eine ungerade Zahl mit $g^n = e_G$. Laut Voraussetzung existiert solch ein n.

   Dann gilt

$$1 = e_H = \Phi(e_G) = \Phi(g^n) = \Phi(g)^n,$$

   also ist $\Phi(g) = 1$, da $(-1)^n = -1$. Damit ist Φ konstant gleich 1 und mithin nicht surjektiv.

I.2 (4 Punkte)

Es seien K ein Körper, V, W zwei K-Vektorräume und $\Phi : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Weiter seien $v_1, \ldots, v_p \in V$ gegeben und

$$w_i = \Phi(v_i), \quad 1 \leq i \leq p,$$

ihre Bildvektoren in W.

a) Zeigen Sie: Wenn $w_1, \ldots, w_p$ linear unabhängig sind, dann auch $v_1, \ldots, v_p$.

b) Zeigen Sie: Ist Φ injektiv und sind $v_1, \ldots, v_p$ linear unabhängig, so sind auch $w_1, \ldots, w_p$ linear unabhängig.

c) Gilt die Implikation in b) auch, wenn Φ nicht als injektiv vorausgesetzt wird? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

Lösung:

a) Zu zeigen ist: Für $a_1, \ldots, a_p \in K$ folgt aus $\sum_i a_i v_i = 0$, dass alle a_i Null sind.

Dies folgt auf dem Umweg über W, indem wir Φ auf die Gleichung $\sum_i a_i v_i = 0$ anwenden. Wegen der Linearität gilt nämlich

$$0 = \Phi(0) = \Phi(\sum_i a_i v_i) = \sum_i a_i \Phi(v_i) = \sum_i a_i w_i.$$

Da die w_i nach Voraussetzung linear unabhängig sind, folgt die gewünschte Aussage über die a_i.

b) Wenn $\sum_i a_i w_i = 0$ gilt, so folgt insbesondere

$$\Phi(\sum_i a_i v_i) = \sum_i a_i w_i = 0 = \Phi(0).$$

Die Injektivität von Φ erzwingt dann $\sum_i a_i v_i = 0$. Daher sind alle a_i Null, denn $v_1, \ldots, v_p$ sind in b) als linear unabhängig vorausgesetzt. Also sind $w_1, \ldots, w_p$ linear unabhängig.

c) Wenn Φ nicht injektiv ist, so wählen wir $p = 1$ und einen von Null verschiedenen Vektor v_1 im Kern von Φ. Dann ist $\{v_1\}$ linear unabhängig, aber $\Phi(v_1) = 0$ ist nicht linear unabhängig. Also braucht man die Injektivität von Φ für die Implikation in b).

I.3 (4 Punkte)

Im reellen Vektorraum $V = \mathbb{R}^5$ seien die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \; w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \; w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

gegeben. Weiter sei U die lineare Hülle von $\{u_1, u_2, u_3\}$ und W die lineare Hülle von $\{w_1, w_2, w_3\}$.

Berechnen Sie Basen der Vektorräume $U + W$ und $U \cap W$.

Lösung:

Da es sich um Vektoren im Standardraum handelt, kann man direkt die Vektoren als Spalten in eine Matrix schreiben und durch elementare Zeilenumformungen eine maximale linear unabhängige Teilmenge als Basis von $U+W$ finden. Das führen wir zunächst durch und sehen dann am Ende der Rechnung, was $U \cap W$ ist.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hierbei wird zunächst die erste Zeile von den übrigen abgezogen, dann die zweite von den letzten drei, dann die dritte von den letzten beiden und schließlich das $\frac{3}{2}$-fache der vierten von der fünften.

Die letzte Matrix hat Rang 4 und die ersten vier Spalten sind linear unabhängig, also ist $\dim(U + W) = 4$ und $\{u_1, u_2, u_3, w_1\}$ ist eine Basis von $U + W$.

Weiter erzeugen die letzten drei Spalten einen zweidimensionalen Vektorraum, also gilt $\dim(W) = 2$, während die ersten drei Spalten linear unabhängig sind: $\dim(U) = 3$.

Die Dimensionsformel $\dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) = \dim(U \cap W)$ impliziert dann $\dim(U \cap W) = 1$. Die Differenz der vierten und fünften Spalte ist eine Linearkombination $\neq 0$ der ersten drei Spalten (nämlich gleich der dritten Spalte), und deshalb ist

$$w_2 - w_1 = (1, 2, 3, 3, 3)^\top = u_3$$

ein Erzeuger von $U \cap W$; eine Basis hiervon ist also $\{u_3\}$.

I.4 (4 Punkte)

Es seien V ein dreidimensionaler K-Vektorraum und $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ Linearformen auf V.

Zeigen Sie, dass diese Linearformen genau dann linear abhängig sind, wenn es einen Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ gibt mit

$$\forall i \in \{1,2,3\} : \varphi_i(v) = 0.$$

Lösung:

Wenn $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ nicht linear abhängig sind, so bilden sie eine Basis des Dualraums V^* von V, denn dieser ist auch dreidimensional. Da es zu jedem $v \neq 0$ eine Linearform ψ mit $\psi(v) \neq 0$ gibt, kann nicht $\varphi_i(v) = 0$ für $i = 1,2,3$ gelten, denn ψ lässt sich als Linearkombination von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ schreiben.

Sind umgekehrt $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ linear abhängig, so gibt es Elemente $a_1, a_2, a_3 \in K$, die nicht alle 0 sind, und so, dass $a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 = 0$. Die lineare Abbildung

$$\Phi : V \longrightarrow K^3, \quad \Phi(v) = (\varphi_i(v))_{1 \leq i \leq 3}.$$

ist dann nicht surjektiv, denn für alle $v \in V$ gilt

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot \Phi(v) = \sum_{i=1}^{3} a_i \varphi_i(v) = 0,$$

und daher können nicht alle Vektoren der Standardbasis im Bild von Φ liegen.

Wegen der Dimensionsformel ist

$$\dim(\mathrm{Kern}(\Phi)) = 3 - \dim(\mathrm{Bild}(\Phi)) > 0,$$

also $\mathrm{Kern}(\Phi) \neq \{0\}$.

Daher gibt es ein $v \in V$, $v \neq 0$, mit $\Phi(v) = 0$, oder auch

$$\forall i \in \{1,2,3\} : \varphi_i(v) = 0.$$

I.5 (4 Punkte)

In Abhängigkeit vom reellen Parameter t sei die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} t+4 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & t \\ 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die A_t diagonalisierbar ist.

b) Berechnen Sie eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, für die $S^{-1}A_0S$ diagonal ist.

Lösung:

a) Das charakteristische Polynom $\det(XI_4 - A_t)$ berechnet sich durch Laplace-Entwicklung erst nach der letzten Zeile und dann nach der zweiten Spalte zu

$$\mathrm{CP}(A_t, X) = (X-2)^2 \cdot ((X-t-4)(X-t)-5) = (X-2)^2 \cdot (X^2-(2t+4)X+t^2+4t-5).$$

Die Eigenwerte außer 2 sind nach der Mitternachtsformel

$$\frac{1}{2}(2t+4 \pm \sqrt{4t^2+16t+16-4t^2-16t+20}) = \frac{1}{2}(2t+4 \pm \sqrt{36}),$$

also $t+5$ und $t-1$.

Die algebraische Vielfachheit von 2 ist mindestens 2. Damit A_t diagonalisierbar sein kann, muss also die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 2 auch mindestens 2 sein, der Rang von $A_t - 2I_4$ also höchstens $4-2=2$. Rangbestimmung für diese Matrix:

$$A_z - 2I_4 = \begin{pmatrix} t+2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & t-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9-t^2 & -t-1 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & t-2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier wurde das $(t+2)$-fache der dritten Zeile von der ersten abgezogen. Der Rang dieser Matrix ist also 2, wenn entweder $t=0$ oder $t=\pm 3$ gilt. Ansonsten ist er 3. Demnach ist A_t höchstens für $t \in \{-3, 0, 3\}$ diagonalisierbar.

Im Fall $t=0$ ist A_t tatsächlich diagonalisierbar, da die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 2 mit der algebraischen Vielfachheit übereinstimmt und die beiden anderen Eigenwerte 5 und -1 algebraisch und damit auch geometrisch einfach sind.

Im Fall $t=\pm 3$ ist 2 ein algebraisch dreifacher Eigenwert, während nach obiger Rangberechnung die geometrische Vielfachheit von 2 nur 2 ist: $A_{\pm 3}$ ist nicht diagonalisierbar.

Also ist A_t genau im Fall $t=0$ diagonalisierbar.

b) Es sei $t = 0$.

Eine Basis des Eigenraums von A_0 zum Eigenwert 2 besteht zum Beispiel aus den Vektoren

$$b_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix},$$

wie sich durch Lösung des homogenen LGS $(A_0 - 2I_4) \cdot v = 0$ ergibt.

Analog ergeben sich die Vektoren

$$b_3 := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } b_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

als Eigenvektoren zu den Eigenwerten 5 und -1.

Daher ist $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ eine Basis aus Eigenvektoren. Die Matrix $S := (b_1, b_2, b_3, b_4)$ ist regulär und erfüllt

$$S^{-1} A_0 S = \operatorname{diag}(2, 2, 5, -1).$$

I.6 (4 Punkte)

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $A = (a_{ij})$ in $\mathbb{R}^{n\times n}$ durch

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{falls } |i-j| = 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

Berechnen Sie $\det(A)$.

Lösung:

Die Einträge der Matrix A sind 0 außer in den beiden Nebendiagonalen, wo der Eintrag α steht. Damit sieht A also so aus:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen für $n \in \{0,1,2,3\}$ die Determinante von A und erhalten in dieser Reihenfolge die Werte $1, 0, -\alpha^2, 0$.

Nun sei $n \geq 2$. Dann ergibt sich die Determinante von A durch Entwicklung nach der letzten Zeile als

$$\det(A) = -\alpha \cdot \det\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & \tilde{A} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0\ \alpha & \alpha \end{array}\right) = -\alpha^2 \det(\tilde{A}),$$

wobei $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n-2)\times(n-2)}$ genauso gebildet ist wie A und beim zweiten Gleichheitszeichen nach der letzten Spalte entwickelt wird..

Wir können also rekursiv die Determinante von A auf die Fälle $n = 0$ oder $n = 1$ zurückführen und erhalten

$$\det(A) = \begin{cases} (-\alpha^2)^k & \text{, falls } n = 2k,\ k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{, falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

II.1 (4 Punkte)

Es seien V ein n-dimensionaler komplexer Vektorraum und $\Phi : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass V die direkte Summe der Untervektorräume $\mathrm{Kern}(\Phi^n)$ und $\mathrm{Bild}(\Phi^n)$ ist.

b) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass V im Allgemeinen nicht die direkte Summe von $\mathrm{Kern}(\Phi)$ und $\mathrm{Bild}(\Phi)$ ist.

Lösung:

a) Da Φ^n ein Endomorphismus von V ist, gilt nach der Dimensionsformel

$$\dim V = \dim \mathrm{Kern}(\Phi^n) + \dim \mathrm{Bild}(\Phi^n).$$

Um die Behauptung zu zeigen genügt es also, die Direktheit der Summe zu zeigen, denn daraus folgt dann bekanntlich

$$\dim(\mathrm{Bild}(\Phi^n) + \mathrm{Kern}(\Phi^n)) = \dim(V),$$

und das zeigt

$$\mathrm{Bild}(\Phi^n) + \mathrm{Kern}(\Phi^n) = V,$$

weil die linke Seite in der rechten enthalten ist und dieselbe Dimension hat.

Die Direktheit der Summe bedeutet hier (zwei Summanden):

$$\mathrm{Kern}(\Phi^n) \cap \mathrm{Bild}(\Phi^n) = \{0\}.$$

Wir nützen aus, dass laut Vorlesung $\mathrm{Kern}(\Phi^n)$ der Hauptraum von Φ zu 0 ist. Das heißt:

$$\mathrm{Kern}(\Phi^n) = \{v \in V \mid \exists k \in \mathbb{N} : \Phi^k(v) = 0\}.$$

Wenn nun v im Durchschnitt $\mathrm{Kern}(\Phi^n) \cap \mathrm{Bild}(\Phi^n)$ liegt, so gibt es ein $w \in V$ mit $\Phi^n(w) = v$, und wir haben noch dazu $\Phi^n(v) = 0$. Das impliziert $\Phi^{2n}(w) = 0$. Also liegt w im Hauptraum zu 0, was nach dem eben erinnerten der Kern von Φ^n ist:

$$v = \Phi^n(w) = 0.$$

Das zeigt die Direktheit der Summe und damit nach oben Gesagtem alles, was behauptet war.

b) Für den Endomorphismus Φ von $\mathbb{C}^2$, der durch

$$\Phi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, gilt:

$$\mathrm{Kern}(\Phi) = \mathbb{C} \cdot e_1 = \mathrm{Bild}(\Phi).$$

Hierbei ist e_1 der erste Vektor der Standardbasis. Das zeigt schon, dass die Summe nicht direkt sein kann.

II.2 (4 Punkte)

Es sei

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Auf $V = \mathbb{R}^3$ wird durch die Formel

$$\forall v, w \in V : \langle v, w\rangle := v^\top \cdot F \cdot w$$

eine symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ festgelegt.

a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V ist.

b) Normieren Sie $e_1 = (1, 0, 0)^\top$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und ergänzen Sie den so entstandenen Vektor zu einer Orthonormalbasis von V bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

c) Bestimmen Sie den bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ orthogonalen Komplementärraum zu dem von $(0, 1, 2)^\top$ und $(1, -2, -3)^\top$ erzeugten Untervektorraum von V.

Lösung:

a) Dass es sich um eine symmetrische Bilinearform handelt, gilt laut Aufgabenstellung. Nur die Positivität ist nachzuweisen.

Um diese einzusehen, verwenden wir das Hurwitz-Kriterium für die Matrix F, denn diese ist die Fundamentalmatrix für die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich der Standardbasis von V. Die Hauptminoren von F sind alle positiv:

$$\det((3)) = 3 > 0,\ \det(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}) = 5 > 0,\ \det(F) = 5 > 0$$

Damit ist F positiv definit und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt.

b) Die Norm von e_1 ist $\sqrt{3}$, also $b_1 := \frac{1}{\sqrt{3}} e_1$ der normierte Vektor zu e_1.

Wir verwenden das Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren, um aus der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ eine ONB $\{b_1, b_2, b_3\}$ zu gewinnen.

b_1 liegt schon fest. Als nächstes berechnen wir

$$\widetilde{b_2} := e_2 - \frac{\langle e_1, e_2\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} \cdot e_1 = e_2 - \frac{1}{3} e_1.$$

Dieser Vektor hat Norm $\sqrt{\widetilde{b_2}^\top F \widetilde{b_2}} = \sqrt{\frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} + 2} = \sqrt{5/3}$. Wir setzen also

$$b_2 := \sqrt{3/5} \cdot \widetilde{b_2}.$$

e_3 steht schon auf b_1 und b_2 senkrecht und hat Länge 1, wir können also

$$b_3 := e_3$$

wählen, und haben damit eine ONB gefunden, die b_1 enthält.

c) Ein Vektor $v = (x, y, z)^\top \in V$ steht genau dann auf den beiden angegebenen Erzeugern senkrecht, wenn

$$(0, 1, 2) \cdot F \cdot v = (1, -2, -3) \cdot F \cdot v = 0.$$

Konkreter heißt das

$$(1, 2, 2) \cdot v = (1, -3, -3) \cdot v = 0,$$

und das bedeutet $x = 0, y = -z$. Damit ist der gesuchte orthogonale Komplementärraum genau

$$\{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y = -z\}.$$

II.3 (4 Punkte)

Es seien V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und Φ, Ψ zwei selbstadjungierte Endomorphismen von V.

Zeigen Sie:

a) $\Phi \circ \Psi$ ist selbstadjungiert $\iff$ $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$.

b) Ist $\Phi \circ \Psi$ selbstadjungiert, so besitzt jeder Eigenraum von Φ eine Basis, die aus Eigenvektoren von Ψ besteht.

c) Ist $\Phi \circ \Psi$ selbstadjungiert, so ist jeder Eigenwert von $\Phi \circ \Psi$ ein Produkt eines Eigenwerts von Φ und eines Eigenwerts von Ψ.

Lösung:

a) Da Φ und Ψ selbstadjungiert sind, gilt für alle $v, w \in V$:

$$\langle \Phi \circ \Psi(v), w \rangle = \langle \Phi(\Psi(v)), w \rangle = \langle \Psi(v), \Phi(w) \rangle = \langle v, \Psi(\Phi(w)) \rangle = \langle v, \Psi \circ \Phi(w) \rangle.$$

Damit ist $\Psi \circ \Phi$ der zu $\Phi \circ \Psi$ adjungierte Endomorphismus. Da $\Phi \circ \Psi$ definitionsgemäß genau dann selbstadjungiert ist, wenn es mit seinem adjungierten übereinstimmt, folgt die Behauptung.

b) Wenn $\Phi \circ \Psi$ selbstadjungiert ist, dann gilt nach a) $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$.

Es sei λ ein Eigenwert von Φ und $v \in \mathrm{Eig}(\Phi, \lambda)$ im zugehörigen Eigenraum. Dann gilt

$$\Phi(\Psi(v)) = \Psi(\Phi(v)) = \Psi(\lambda v) = \lambda \Psi(v),$$

und demnach ist auch $\Psi(v) \in \mathrm{Eig}(\Phi, \lambda)$.

Also ist dieser Eigenraum ein Ψ-invarianter Untervektorraum. Die Einschränkung von Ψ auf diesen Vektorraum ist dann immer noch selbstadjungiert (bezüglich des auf den Eigenraum eingeschränkten Skalarprodukts), und daher gibt es nach dem Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen eine Basis von $\mathrm{Eig}(\Phi, \lambda)$, die aus Eigenvektoren von Ψ besteht.

c) Es sei v ein gemeinsamer Eigenvektor für Φ und Ψ, also ein Vektor $\neq 0$, für den es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gibt mit $\Phi(v) = \lambda v, \Psi(v) = \mu v$.

Dann gilt $\Phi \circ \Psi(v) = \Phi(\mu v) = \mu \Phi(v) = \lambda \mu v$.

Da es nach b) eine Basis von V aus gemeinsamen Eigenvektoren von Φ und Ψ gibt (V ist nach dem Spektralsatz die direkte Summe der Eigenräume von Φ, da Φ selbstadjungiert ist), ist jeder Eigenwert von $\Phi \circ \Psi$ ein Produkt von Eigenwerten von Φ und von Ψ.

II.4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 & \sqrt{3}-2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3}-2 & \sqrt{3}+2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ x \mapsto A\cdot x$, eine Isometrie des euklidischen Standardraums $\mathbb{R}^3$ ist.

Bestimmen Sie die euklidische Normalform B von A sowie eine orthogonale Matrix $S \in \mathrm{O}(3)$ mit der Eigenschaft $B = S^{-1}AS$.

Lösung:

Da A die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist, ist Φ genau dann eine Isometrie, wenn $A^\top \cdot A = I_3$ die Einheitsmatrix ist, was auch der Fall ist.

Wäre -1 ein Eigenwert von Φ, so wäre das ein Diagonaleintrag in der Isometrienormalform von A. Die beiden anderen Diagonaleinträge müssten sich also zu $2+\sqrt{3}$ addieren, denn die Spur von A ist $1+\sqrt{3}$. Das geht aber nicht, denn die Beträge der Einträge der Normalform sind ≤ 1. Deshalb ist -1 kein Eigenwert von Φ. Es ist also 1 ein Eigenwert und $\det A = 1$ (das hätte man natürlich auch so nachrechnen können...).

Damit finden wir (wegen der bekannten Spur) die Isometrienormalform

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Aus

$$A - I_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3}-2 & \sqrt{3}-2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3}-2 & \sqrt{3}-2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{3}-4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

ergibt sich $b_1 := \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1,-1,0)^\top$ als ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert 1 von Φ. Im Orthogonalraum dazu findet sich der dritte Standardbasisvektor $b_2 := e_3$, und

$$b_3 := 2\cdot(Ab_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}b_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0)^\top$$

steht auf b_1, b_2 senkrecht und erfüllt nach Konstruktion

$$Ab_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_3.$$

Da $\{b_1, b_2, b_3\}$ eine ONB ist, ist

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine mögliche Wahl für S.

II.5 (4 Punkte)

Es seien V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und Φ ein Endomorphismus von V mit der Eigenschaft

$$\forall v \in V : \langle v, \Phi(v)\rangle = 0.$$

Zeigen Sie:

a) Für jeden zweidimensionalen Untervektorraum U von V mit $\Phi(U) \subseteq U$ und für jede Orthonormalbasis $\{b_1, b_2\}$ von U gibt es eine reelle Zahl a, sodass $\Phi(b_1) = ab_2$ und $\Phi(b_2) = -ab_1$.

b) In der Situation aus Teil a) ist der Betrag von a von der Wahl einer Orthonormalbasis in U unabhängig.

c) $-\Phi$ ist der zu Φ adjungierte Endomorphismus, und Φ ist normal.

Lösung:

a) Da $\Phi(b_1)$ auf b_1 senkrecht steht und auch in U liegt, muss es ein Vielfaches von b_2 sein. Genauso ist $\Phi(b_2)$ ein Vielfaches von b_1. Es gibt also Zahlen a und $\tilde{a}$ mit

$$\Phi(b_1) = ab_2,\ \Phi(b_2) = \tilde{a}b_1.$$

Zu zeigen ist noch $\tilde{a} = -a$. Das folgt aber daraus, dass nach Voraussetzung auch $\Phi(b_1 + b_2) = ab_2 + \tilde{a}b_1$ auf $b_1 + b_2$ senkrecht steht:

$$0 \stackrel{!}{=} \langle ab_2 + \tilde{a}b_1, b_1 + b_2\rangle = a + \tilde{a}.$$

Die letzte Gleichheit folgt daraus, dass b_1, b_2 normiert und orthogonal sind, und aus der Bilinearität des Skalarprodukts.

b) Die Abbildungsmatrix der Einschränkung von Φ auf U bezüglich $\{b_1, b_2\}$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher hat dieser Endomorphismus von U Determinante a^2. Da die Determinante nicht von der Wahl einer Basis abhängt, ist auch der Betrag von a von der Basiswahl unabhängig.

`(Das Vorzeichen ändert sich bei geänderter Reihenfolge der Basisvektoren, aber danach war nicht gefragt...).`

c) Es seien $v, w \in V$ Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 = &\ \langle \Phi(v+w), v+w\rangle = \langle\Phi(v), v\rangle + \langle\Phi(v), w\rangle + \langle\Phi(w), v\rangle + \langle\Phi(w), w\rangle \\ = &\ \langle\Phi(v), w\rangle + \langle\Phi(w), v\rangle, \end{aligned}$$

da v und w auf ihren Bildern unter Φ senkrecht stehen. Wegen der Symmetrie des Skalarprodukts haben wir dann

$$\forall v, w \in V :\ \langle\Phi(v), w\rangle = -\langle\Phi(w), v\rangle = -\langle v, \Phi(w)\rangle = \langle v, -\Phi(w)\rangle$$

und daher ist $\Phi^* = -\Phi$ (nach Definition der adjungierten Abbildung).

Klar folgt hieraus $\Phi^* \circ \Phi = \Phi \circ \Phi^*$, und das Erfülltsein dieser Gleichung ist das definierende Kriterium der Normalität von Φ.

II.6 (4 Punkte)

$V = \mathbb{R}^3$ sei mit dem Standardskalarprodukt ausgestattet. Mit e_1, e_2, e_3 seien die Vektoren der Standardbasis bezeichnet.

In V seien die Geraden g und h durch

$$\begin{aligned} g = & \quad \mathbb{R} \cdot e_1 = \{te_1 \mid t \in \mathbb{R}\} \\ h = & \quad e_3 + \mathbb{R} \cdot (e_1 + e_2) = \{e_3 + s(e_1 + e_2) \mid s \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

gegeben.

Schließlich bezeichnen wir für $x \in V$ mit $d(x, g)$ und $d(x, h)$ die Abstände von x zu den Geraden g und h.

Zeigen Sie, dass

$$Q = \{x \in V \mid d(x, g) = d(x, h)\}$$

eine Quadrik in V ist und bestimmen Sie deren affine Normalform.

Lösung:

Zunächst berechnen wir die Abstände vom Punkt $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$ zu den Geraden g und h.

Es gilt

$$d(x, g) = \min\{\sqrt{(x_1 - t)^2 + x_2^2 + x_3^2} | t \in \mathbb{R}\} = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$$

und

$$d(x, h) = \min\{\sqrt{(x_1 - s)^2 + (x_2 - s)^2 + (x_3 - 1)^2} \mid s \in \mathbb{R}\} = \sqrt{\frac{(x_1 - x_2)^2}{2} + (x_3 - 1)^2}$$

Letzteres sieht man zum Beispiel daran, dass für den Wert s, bei dem das Minimum angenommen wird, der Vektor $(x_1 - s, x_2 - s, x_3 - 1)^\top$ auf dem Richtungsvektor $(1, 1, 0)^\top$ von h senkrecht stehen muss: $s = (x_1 + x_2)/2$.

Da die Abstände niemals negativ werden, ist die Gleichung $d(x, g) = d(x, h)$ gleichwertig mit der Gleichung $2d(x, g)^2 = 2d(x, h)^2$. Mit den eben berechneten Abständen ist das

$$2x_2^2 + 2x_3^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_3 + 2,$$

also gilt

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 - 4x_3 + 2 = 0\},$$

und das ist eine Quadrik.

Führt man hier neue Koordinaten $u = \sqrt{2}x_1,\ v = x_1 + x_2, w = 4x_3 - 2$ ein, so wird die Quadrik Q durch die Gleichung

$$u^2 - v^2 - w = 0$$

beschrieben. Das ist schon die affine Normalform, es handelt sich um ein hyperbolisches Paraboloid.