Lösungen zur LA Klausur, September 2008

I.1 (4 Punkte)

Auf $\mathbb{Z}$ sei eine Verknüpfung $\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ erklärt durch $\alpha \circ \beta := \alpha + \beta + 5$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}, \circ)$ eine abelsche Gruppe ist.

(b) Weisen Sie nach, dass $(\mathbb{Z}, \circ)$ und $(\mathbb{Z}, +)$ isomorphe Gruppen sind.

(c) Lösen Sie die Gleichung $x \circ x = 21$ in $(\mathbb{Z}, \circ)$.

Lösung. (a) Die Verknüpfung ist abgeschlossen, d.h. $\circ$ ist korrekt definiert.
Assoziativität: Wir nutzen hier und im Folgenden die Eigenschaften von $(\mathbb{Z}, +)$ aus und erhalten so:

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = (\alpha + \beta + 5) + \gamma + 5 = \alpha + \beta + \gamma + 10 = \alpha + (\beta + \gamma + 5) + 5 = \alpha + (\beta \circ \gamma) + 5 = \alpha \circ (\beta \circ \gamma).$$

Kommutativität: $\alpha \circ \beta = \alpha + \beta + 5 = \beta + \alpha + 5 = \beta \circ \alpha$.
Neutralelement: $e = -5$ ist Neutralelement, denn für $\alpha \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\alpha \circ e = \alpha + (-5) + 5 = \alpha = (-5) + \alpha + 5 = e \circ \alpha.$$

Inverse: Zu $\alpha \in \mathbb{Z}$ ist $-\alpha - 10$ invers, da

$$\alpha \circ (-\alpha - 10) = \alpha - \alpha - 10 + 5 = -5 = e = (-\alpha - 10) \circ \alpha.$$

Bemerkung: Bei den Nachweisen zu „Neutralelement“ und „Inverse“ kann man alternativ auch schon die zuvor nachgewiesene Kommutativität verwenden.
(b) Die Abbildung $\varphi : (\mathbb{Z}, \circ) \to (\mathbb{Z}, +)$, $\alpha \mapsto \alpha + 5$, ist ein Isomorphismus, da φ offenbar bijektiv ist und da ferner gilt:

$$\varphi(\alpha \circ \beta) = \varphi(\alpha + \beta + 5) = (\alpha + \beta + 5) + 5 = \alpha + \beta + 10 = (\alpha + 5) + (\beta + 5) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta).$$

(c) Es gilt

$$x \circ x = 21 \Leftrightarrow x + x + 5 = 21 \Leftrightarrow 2x = 16 \Leftrightarrow x = 8.$$

I.2 (4 Punkte)

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$.

(a) Seien $a_1, a_2, a_3 \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$.
Zeigen Sie:

$$[a_1, a_2] = [a_1, a_3].$$

(b) Seien $a_1, \dots, a_n \in V \setminus \{0\}$.
Beweisen Sie, dass $a_1, \dots, a_n$ genau dann linear unabhängig sind, wenn gilt

$$[a_1, \dots, a_i] \cap [a_{i+1}, \dots, a_n] = \{0\} \qquad \text{für } i = 1, \dots, n-1.$$

Hinweis: Mit $[a_1, \dots, a_k]$ wird die lineare Hülle von $a_1, \dots, a_k$ bezeichnet.

Lösung. (a) Wegen $a_2 = -(\lambda_1/\lambda_2)a_1 - (\lambda_3/\lambda_2)a_3$, $\lambda_2 \neq 0$, folgt $[a_1, a_2] \subset [a_1, a_3]$. Aus Symmetriegründen folgt auch die umgekehrte Inklusion.
(b) „$\Rightarrow$“ : Seien $a_1, \dots, a_n \in V \setminus \{0\}$ linear unabhängig. Sei $i \in \{1, \dots, n-1\}$ beliebig und sei $x \in [a_1, \dots, a_i] \cap [a_{i+1}, \dots, a_n]$. Dann gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit

$$x = \sum_{j=1}^{i} \lambda_j a_j = \sum_{j=i+1}^{n} \lambda_j a_j$$

und daher

$$\sum_{j=1}^{i} \lambda_j a_j + \sum_{j=i+1}^{n} (-\lambda_j) a_j = 0.$$

Da $a_1, \dots, a_n$ linear unabhängig sind, folgt $\lambda_i = 0$ für $i = 1, \dots, n$. Also ist $x = 0$. Andererseits gilt stets $0 \in [a_1, \dots, a_i] \cap [a_{i+1}, \dots, a_n]$. Es folgt $[a_1, \dots, a_i] \cap [a_{i+1}, \dots, a_n] = \{0\}$.

„$\Leftarrow$“ : Jetzt gelte $\{0\} = [a_1, \ldots, a_i] \cap [a_{i+1}, \ldots, a_n]$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0.$$

Angenommen, nicht alle Koeffizienten sind 0. Sei $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ der größte Index i mit $\lambda_i \neq 0$. Also ist $\lambda_i = 0$ für $i > i_0$.
Ist $i_0 = 1$, so folgt $\lambda_1 a_1 = 0$ und daher $\lambda_1 = 0$ wegen $a_1 \neq 0$. Widerspruch.
Sei nun $i_0 \geq 2$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{i_0-1} \lambda_i a_i = -\lambda_{i_0} a_{i_0} \in [a_1, \ldots, a_{i_0-1}] \cap [a_{i_0}, \ldots, a_n] = \{0\}.$$

Wie eben folgt $\lambda_{i_0} = 0$, da $a_{i_0} \neq 0$. Widerspruch.
Somit sind alle Koeffizienten gleich 0, was die lineare Unabhängigkeit von $a_1, \ldots, a_n$ beweist.

Hier bietet sich auch ein schrittweises (induktives) Argument an, bei dem man z.B. der Reihe nach zeigt, dass $\lambda_n = 0$, $\lambda_{n-1} = 0$, etc.

I.3 (4 Punkte)

Seien U_1, U_2 Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$ mit

$$U_1 := \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \qquad U_2 := \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right].$$

Bestimmen Sie zu $U_1, U_2, U_1 \cap U_2, U_1 + U_2$ je eine Basis und die Dimension.

Lösung. Indem man die Differenz des zweiten und dritten Vektors sowie die Differenz des ersten und zweiten Vektors in der gegebenen Darstellung von U_1 bildet, erhält man

$$U_1 = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Die drei zuletzt erhaltenen Vektoren sind linear unabhängig und bilden somit eine Basis von U_1. Ebenso erhält man durch Subtraktion des dritten Vektors vom zweiten Vektor in der gegebenen Darstellung von U_2

$$U_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right],$$

wobei zuletzt verwendet wurde, dass der mittlere Vektor das arithmetische Mittel der beiden anderen Vektoren ist. Die beiden zuletzt erhaltenen Vektoren sind linear unabhängig und bilden somit eine Basis von U_2. Insbesondere erhält man nun $\dim(U_1) = 3$ und $\dim(U_2) = 2$. Wegen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \notin U_1$$

ist $\dim(U_1 + U_2) \geq 4$, und da es sich um einen UVR des $\mathbb{R}^4$ handelt, ist $\dim(U_1 + U_2) = 4$. Als Basis kann somit die Standardbasis gewählt werden. Aus dem Dimensionssatz folgt $\dim(U_1 \cap U_2) = 3 + 2 - 4 = 1$. Nun gilt (Summe der Basisvektoren!)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \in U_2 \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_1,$$

d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_1 \cap U_2,$$

was eine Basis des Durchschnitts ist.

I.4 (4 Punkte)

Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und $\varphi, \psi \in V^* \setminus \{0\}$ zwei Linearformen. Zeigen Sie:

$$\varphi, \psi \text{ sind linear abhängig } \Leftrightarrow \operatorname{Kern}(\varphi) = \operatorname{Kern}(\psi).$$

Lösung. „$\Leftarrow$“ : Sei $\operatorname{Kern}(\varphi) = \operatorname{Kern}(\psi)$ für Linearformen $\varphi, \psi \in V^* \setminus \{0\}$. Wegen $\varphi \neq 0$ gibt es ein $x_0 \in V$ mit $\varphi(x_0) \neq 0$. Nach Voraussetzung ist dann auch $\psi(x_0) \neq 0$. Wir zeigen $\varphi = \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}\psi$. Sei hierzu $x \in V$ beliebig gewählt. Dann gilt

$$\psi\left(x - \frac{\psi(x)}{\psi(x_0)}x_0\right) = \psi(x) - \frac{\psi(x)}{\psi(x_0)}\psi(x_0) = 0.$$

Also gilt

$$x - \frac{\psi(x)}{\psi(x_0)}x_0 \in \operatorname{Kern}(\psi) = \operatorname{Kern}(\varphi).$$

Aus

$$0 = \varphi\left(x - \frac{\psi(x)}{\psi(x_0)}x_0\right) = \varphi(x) - \frac{\psi(x)}{\psi(x_0)}\varphi(x_0)$$

folgt so

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}\psi(x).$$

Dies zeigt die Behauptung, da $x_0 \in V$ beliebig war.

„$\Rightarrow$“ : Seien φ und ψ linear abhängig. Es gibt also $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $\lambda\varphi + \mu\psi = 0$, wobei *nicht* $\lambda = \mu = 0$ gilt. Dann gilt sogar $\lambda \neq 0$ und $\mu \neq 0$. (Aus $\lambda = 0$ etwa folgt $\mu\psi = 0$. Wegen $\psi \neq 0$ wäre also auch $\mu = 0$, ein Widerspruch.) Hieraus folgt für $x \in V$, dass genau dann $\varphi(x) = 0$ gilt, wenn $\psi(x) = 0$ gilt. Also ist $\operatorname{Kern}(\varphi) = \operatorname{Kern}(\psi)$.

Der angegebene Beweis zeigt, dass die Aussage für einen beliebigen Vektorraum V gilt. Verwendet man die vorausgesetzte Endlichkeit der Dimension des Vektorraums, so kann man für die Richtung „$\Leftarrow$“ auch anders argumentieren: Sei $U := \operatorname{Kern}(\varphi) = \operatorname{Kern}(\psi)$. Wegen $\varphi, \psi \neq 0$ gilt

$$\dim(U) = \dim(\operatorname{Kern}(\varphi)) = \dim(V) - \dim(\operatorname{Bild}(\varphi)) = \dim(V) - 1.$$

Aufgrund des Basisergänzungssatzes existiert ein Vektor $w \in V \setminus \{0\}$ mit $V = U \oplus [w]$. Dann gilt $\varphi(w) \neq 0$ und $\psi(w) \neq 0$. Für $x \in V$ gibt es nun $u \in U$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $x = u + \lambda w$. Somit erhält man

$$\varphi(x) = \varphi(u + \lambda w) = \varphi(u) + \lambda\varphi(w) = \lambda\varphi(w).$$

In gleicher Weise folgt $\Psi(x) = \lambda\psi(w)$. Dies zeigt

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(w)}{\psi(w)}\psi(x)$$

für alle $x \in V$ und damit $\varphi = \frac{\varphi(w)}{\psi(w)}\psi$.

Als Alternative bietet sich die Verwendung des Rieszschen Darstellungssatzes an.

I.5 (4 Punkte)

(a) Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie eine Definition dafür, dass eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalisierbar ist.

(b) Gegeben sei die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 2+t & 4 & 2+t & 2+t \\ t-2 & 0 & -6+t & -2-t \\ -t+2 & -4 & -t+2 & -2-t \\ 0 & 0 & 0 & 2t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die A_t diagonalisierbar ist.

Lösung. (a) Die Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist diagonalisierbar, falls es eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Alternativ: Es gibt linear unabhängige Vektoren $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, so dass $Ab_i = \lambda_i b_i$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt.

(b) Zur Bestimmung der Eigenwerte wird zunächst das charakteristische Polynom $p_{A_t}(\lambda)$ von A_t berechnet:

$$
\begin{aligned}
\det(A_t - \lambda\mathbb{E}_4) &= (2t-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2+t-\lambda & 4 & 2+t \\ t-2 & -\lambda & -6+t \\ -t+2 & -4 & -t+2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (2t-\lambda)\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 4-\lambda \\ 0 & -(\lambda+4) & -(\lambda+4) \\ -t+2 & -4 & -t+2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (2t-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+4)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -t+2 & -4 & -t+2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (\lambda-2t)(\lambda-4)^2(\lambda+4).
\end{aligned}
$$

Eigenwerte sind also $\lambda = -4$, $\lambda = 4$ und $\lambda = 2t$.
Nun wird $\dim(E_4)$ bestimmt:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Rg}(A_t - 4\mathbb{E}_4) &= \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} t-2 & 4 & 2+t & 2+t \\ t-2 & -4 & -6+t & -2-t \\ -t+2 & -4 & -t-2 & -2-t \\ 0 & 0 & 0 & 2t-4 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} t-2 & 1 & 2+t & 2+t \\ t-2 & -1 & -6+t & -2-t \\ -t+2 & -1 & -t-2 & -2-t \\ 0 & 0 & 0 & 2t-4 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2(t-2) & -1 & 2(t-2) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(t-2) \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & t-2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{cases} 1, & \text{falls } t = 2, \\ 3, & \text{falls } t \neq 2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ist $t \neq 2$, so ist $\dim(E_4) = 1 < 2$, weshalb A_t für $t \neq 2$ nicht diagonalisierbar ist.

Ist $t = 2$, so gilt $\dim(E_4) = 3$. Ferner ist $\dim(E_{-4}) = 1$. Es folgt $E_{-4} \oplus E_4 = \mathbb{R}^4$. Somit ist A_2 diagonalisierbar.

I.6 (4 Punkte)

Seien V ein reeller Vektorraum, $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis von V und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ein Endomorphismus Φ von V sei erklärt durch

$$\Phi(b_i) = (\alpha-\beta)b_i + \beta\sum_{j=1}^{n} b_j, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

(a) Stellen Sie die Abbildungsmatrix A von Φ bezüglich der angegebenen Basis auf.

(b) Berechnen Sie $\det(A)$.

Lösung. (a) Wegen

$$\Phi(b_i) = (\alpha-\beta)b_i + \beta\sum_{j=1}^{n} b_j = \alpha b_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \beta b_j, \qquad i = 1,\dots,n,$$

folgt

$$A_\Phi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{pmatrix}.$$

(b) Subtraktion der letzten Zeile von den Zeilen 1 bis $n-1$ ergibt

$$\det(A_\Phi) = \det\begin{pmatrix} \alpha-\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta-\alpha \\ 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & \beta-\alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & \beta-\alpha \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Jetzt addiert man der Reihe nach die erste, die zweite, ..., die $(n-1)$te Spalte zur letzten Spalte und erhält so

$$\det(A_\Phi) = \det\begin{pmatrix} \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0 \\ \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha+(n-1)\beta \end{pmatrix} = (\alpha-\beta)^{n-1}(\alpha+(n-1)\beta).$$

II.1 (4 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p_A, das Minimalpolynom m_A und die Jordansche Normalform J_A von A.

(b) Die Matrix $B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ habe das charakteristische Polynom $p_B(X) = (X-\lambda)^3 \cdot (X-\mu)$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $\lambda \neq \mu$.

Welche Jordansche Normalformen J_B und zugehörige Minimalpolynome m_B können hierbei auftreten?

Lösung. (a) Für das charakteristische Polynom erhält man, indem man zunächst nach der letzten Spalte entwickelt:

$$
\begin{aligned}
p_A(t) &= \det\begin{pmatrix} 2-t & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3-t & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5-t & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4-t \end{pmatrix} \\
&= (4-t)\det\begin{pmatrix} 2-t & -1 & -1 \\ 0 & 3-t & 1 \\ 2 & 1 & 5-t \end{pmatrix} \\
&= (4-t)\det\begin{pmatrix} 2-t & 2-t & 0 \\ 0 & 3-t & 1 \\ 2 & 1 & 5-t \end{pmatrix} \\
&= (4-t)(2-t)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3-t & 1 \\ 2 & 1 & 5-t \end{pmatrix} \\
&= (4-t)(2-t)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3-t & 1 \\ 0 & -1 & 5-t \end{pmatrix} \\
&= (4-t)(2-t)[(3-t)(5-t)+1)] = (4-t)^3(2-t).
\end{aligned}
$$

Für die Dimension des Eigenraumes E_4 zum Eigenwert 4 gilt $\dim(E_4) = 4 - \mathrm{Rg}(A - 4\mathbb{E}_4)$. Wegen

$$
\mathrm{Rg}(A-4\mathbb{E}_4) = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2,
$$

erhält man also $\dim(E_4) = 2$. Folglich gibt es genau zwei Jordankästchen zum Eigenwert 4, der Jordanblock zum Eigenwert 4 hat die Länge 3. Somit hat ein Jordankästchen zum Eigenwert 4 die Länge 1, das andere die Länge 2. Wegen $\dim(E_2) = 1$ folgt:

$$
J_A = \begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 4 & 0 & \\ & 1 & 4 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}.
$$

Für das Minimalpolynom erhält man $m_A(t) = (t-4)^2(t-2)$, da der Exponent 2 des Linearfaktors $t-4$ gerade die Länge eines längsten Jordankästchens zum Eigenwert 4 angibt.

(b) Die Matrix B hat die zwei verschiedenen Eigenwerte λ und μ. Der Eigenraum zum Eigenwert μ hat die Dimension 1. Im folgenden verwenden wir, dass die Länge eines längsten Jordankästchens zum Eigenwert λ gerade der Exponent des Linearfaktors $t-\lambda$ im Minimalpolynom von B ist. Wir unterscheiden drei Fälle:

Ist $\dim(E_\lambda) = 3$, so gibt es drei Jordankästchen der Länge 1 zum Eigenwert λ. Somit folgt

$$
J_B = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \mu \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad m_B(t) = (t-\lambda)(t-\mu).
$$

Ist $\dim(E_\lambda) = 2$, so gibt es zwei Jordankästchen zum Eigenwert λ, und zwar eines der Länge 1 und eines der Länge 2. Somit folgt

$$
J_B = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & 0 & \\ & 1 & \lambda & \\ & & & \mu \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad m_B(t) = (t-\lambda)^2(t-\mu).
$$

Ist $\dim(E_\lambda) = 1$, so gibt es ein Jordankästchen zum Eigenwert λ der Länge 3. Somit folgt

$$
J_B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & & \\ 1 & \lambda & 0 & \\ & 1 & \lambda & \\ & & & \mu \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad m_B(t) = (t-\lambda)^3(t-\mu).
$$

Wie die angegebenen Matrizen J_B zeigen, sind alle drei Fälle auch möglich.

II.2 (4 Punkte)

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum mit Orthonormalbasis $(b_1, \ldots, b_n)$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $x, y \in V$ gilt:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, b_k \rangle \langle y, b_k \rangle.$$

(b) Für alle Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ gilt:

$$\left(\det \begin{pmatrix} \langle v_1, b_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, b_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, b_1 \rangle & \cdots & \langle v_n, b_n \rangle \end{pmatrix} \right)^2 = \det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Lösung. (a) Sei $x \in V$. Da $(b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis ist, gibt es $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ mit

$$x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i.$$

Da $(b_1, \ldots, b_n)$ sogar eine ONB ist, erhält man

$$\langle x, b_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i, b_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \langle b_i, b_j \rangle = \beta_j,$$

also

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i \rangle b_i.$$

Dies liefert schließlich

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i \rangle b_i, y \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i \rangle \langle b_i, y \rangle$$

und damit

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i \rangle \langle y, b_i \rangle.$$

(b) Sei $A = (a_{ij})$ die $n \times n$ Matrix mit $a_{ij} = \langle v_i, b_j \rangle$. Dann gilt für $B = (b_{ij}) := A \cdot A^\top$ gerade

$$b_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \langle v_i, b_l \rangle \langle v_j, b_l \rangle = \langle v_i, v_j \rangle,$$

wobei zuletzt (a) verwendet wurde. Damit erhält man in abkürzender Notation

$$(\det(\langle v_i, b_j \rangle))^2 = \det(A) \cdot \det(A) = \det(A) \cdot \det(A^\top) = \det(A \cdot A^\top) = \det(B) = \det(\langle v_i, v_j \rangle),$$

was die Behauptung beweist.

II.3 (4 Punkte)

Es sei Φ ein Endomorphismus eines euklidischen Vektorraums $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Zu Φ existiere der adjungierte Endomorphismus Φ^*. Weiter sei

$$\Psi := \Phi \circ \Phi^* + \Phi^* \circ \Phi.$$

Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{Kern}(\Psi) \subset \{v \in V \mid \forall w \in V : \langle \Phi(v), \Phi(w) \rangle + \langle \Phi^*(v), \Phi^*(w) \rangle = 0\}$.

(b) $\operatorname{Kern}(\Psi) = \operatorname{Kern}(\Phi) \cap \operatorname{Kern}(\Phi^*)$.

Lösung. (a) Sei $a \in \text{Kern}(\Psi)$, also $\Phi \circ \Phi^*(a) + \Phi^* \circ \Phi(a) = 0$. Nun gilt für alle $w \in V$:

$$\langle \Phi(a), \Phi(w)\rangle + \langle \Phi^*(a), \Phi^*(w)\rangle = \langle \Phi^* \circ \Phi(a), w\rangle + \langle \Phi \circ \Phi^*(a), w\rangle = \langle \Phi \circ \Phi^*(a) + \Phi^* \circ \Phi(a), w\rangle = 0.$$

Dies zeigt

$$a \in \{v \in V \mid \forall w \in V : \langle \Phi(v), \Phi(w)\rangle + \langle \Phi^*(v), \Phi^*(w)\rangle = 0\}.$$

(b) Es bezeichnet $\|\cdot\|$ die durch das Skalarprodukt induzierte Norm. Sei $x \in \text{Kern}(\Psi)$. Wählt man $v = w = x$, so erhält man mit (a) gerade

$$\|\Phi(x)\|^2 + \|\Phi^*(x)\|^2 = \langle \Phi(x), \Phi(x)\rangle + \langle \Phi^*(x), \Phi^*(x)\rangle = 0.$$

Es folgt $\Phi(x) = \Phi^*(x) = 0$ und daher $x \in \text{Kern}(\Phi) \cap \text{Kern}(\Phi^*)$.
Sei nun $x \in \text{Kern}(\Phi) \cap \text{Kern}(\Phi^*)$, d.h. $\Phi(x) = \Phi^*(x) = 0$. Hieraus folgt $\Phi \circ \Phi^*(x) = \Phi^* \circ \Phi(x) = 0$ und daher $\Psi(x) = 0$, d.h. $x \in \text{Kern}(\Psi)$.

II.4 (4 Punkte)

Im euklidischen Standardraum $\mathbb{R}^3$ sei eine eigentliche Drehung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben mit

$$\Phi(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \Phi(\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Drehachse $[v]$, Drehwinkel ω und (euklidische) Normalform $\tilde{A}$ von Φ.

Lösung. Da Φ eine eigentliche Drehung des $\mathbb{R}^3$ ist, gilt $\Phi(x) - x \in [v]^\perp =: U$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Man erhält so

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \in U.$$

Es folgt

$$U = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}] = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}].$$

Aus $v \perp U$ erhält man $v_1 = v_3$ und $v_2 = v_3$, so dass man

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wählen kann. Insbesondere gilt nun $\Phi(v) = v$. Mit Hilfe eines LGS leitet man leicht her, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (-4)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt und daher

$$\Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) = -4\Phi(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) - \Phi(\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}) + 6\Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = -4\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Für den Drehwinkel ω erhält man so

$$\cos(\omega) = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

also $\omega = 60°$. Nun folgt wegen $\sin(\omega) = \sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ für die Normalform $\tilde{A}$ von A:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

II.5 (4 Punkte)

Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$ und Φ ein normaler Endomorphismus von V.
Zeigen Sie:

(a) Für $x, y \in V$ gilt:
$$\|\Phi(x) - iy\|^2 + \|\Phi(y) + ix\|^2 = \|\Phi^*(x) - iy\|^2 + \|\Phi^*(y) + ix\|^2.$$

(b) Für $x \in V$ mit $\Phi^2(x) = x$ und $y := -i\Phi(x)$ gilt:
$$\Phi^*(x) = iy \quad \text{und} \quad \Phi^*(y) = -ix.$$

Lösung. (a) Für den normalen Endomorphismus Φ gilt $\langle\Phi(x), \Phi(y)\rangle = \langle\Phi^*(x), \Phi^*(y)\rangle$ für alle $x, y \in V$. Verwendet man, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ hermitesch ist sowie die definierende Gleichung einer adjungierten Abbildung und bezeichnet $\|\cdot\|$ die induzierte Norm, so erhält man einerseits

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x) - iy\|^2 + \|\Phi(y) + ix\|^2 &= \langle\Phi(x) - iy, \Phi(x) - iy\rangle + \langle\Phi(y) + ix, \Phi(y) + ix\rangle \\
&= \langle\Phi(x), \Phi(x)\rangle + i\langle\Phi(x), y\rangle - i\langle y, \Phi(x)\rangle - i\cdot i\langle y, y\rangle \\
&\quad + \langle\Phi(y), \Phi(y)\rangle + i\langle x, \Phi(y)\rangle - i\langle\Phi(y), x\rangle - i\cdot i\langle x, x\rangle \\
&= \langle\Phi^*(x), \Phi^*(x)\rangle + i\langle x, \Phi^*(y)\rangle - i\langle\Phi^*(y), x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&\quad + \langle\Phi^*(y), \Phi^*(y)\rangle + i\langle\Phi^*(x), y\rangle - i\langle y, \Phi^*(x)\rangle + \langle x, x\rangle.
\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
\|\Phi^*(x) - iy\|^2 + \|\Phi^*(y) + ix\|^2 &= \langle\Phi^*(x) - iy, \Phi^*(x) - iy\rangle + \langle\Phi^*(y) + ix, \Phi^*(y) + ix\rangle \\
&= \langle\Phi^*(x), \Phi^*(x)\rangle + i\langle\Phi^*(x), y\rangle - i\langle y, \Phi^*(x)\rangle - i\cdot i\langle y, y\rangle \\
&\quad + \langle\Phi^*(y), \Phi^*(y)\rangle + i\langle x, \Phi^*(y)\rangle - i\langle\Phi^*(y), x\rangle - i\cdot i\langle x, x\rangle \\
&= \langle\Phi^*(x), \Phi^*(x)\rangle + i\langle\Phi^*(x), y\rangle - i\langle y, \Phi^*(x)\rangle + \langle y, y\rangle \\
&\quad + \langle\Phi^*(y), \Phi^*(y)\rangle + i\langle x, \Phi^*(y)\rangle - i\langle\Phi^*(y), x\rangle + \langle x, x\rangle.
\end{aligned}$$

Die erhaltenen rechten Gleichungsseiten sind gleich, somit also auch die linken Gleichungsseiten, d.h. die Behauptung.

(b) Sei $x \in V$ mit $\Phi^2(x) = x$ und $y := -i\Phi(x)$. Dann gilt zunächst $\Phi(x) - iy = \Phi(x) - \Phi(x) = 0$. Wegen $\Phi(y) = -i\Phi^2(x) = -ix$ gilt ferner $\Phi(y) + ix = 0$. Jeder der beiden Summanden der linken Seite der Gleichung in (a) ist also gleich 0, d.h. die linke Seite der Gleichung in (a) ist gleich 0. Somit ist die rechte Seite der Gleichung in (a) gleich 0, d.h. aber, dass jeder der beiden nichtnegativen Summanden der rechten Seite der Gleichung in (a) gleich 0 sein muss. Es folgt unmittelbar $\Phi^*(x) = iy$ und $\Phi^*(y) = -ix$.

II.6 (4 Punkte)

Für $a \in \mathbb{R}^3$ sei die Affinität $\varphi_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\varphi_a(x) = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -8 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} x + a.$$

(a) Geben Sie alle $a \in \mathbb{R}^3$ an, so dass φ_a mindestens einen Fixpunkt hat. Zeigen Sie, dass in diesen Fällen die Fixpunktmenge eine Ebene E_a ist.

(b) Sei nun
$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Sind $P, Q \in \mathbb{R}^3$ keine Fixpunkte von φ_a, so ist die Gerade durch P und $\varphi_a(P)$ parallel zu der Geraden durch Q und $\varphi_a(Q)$.

Lösung. (a) φ_a hat einen Fixpunkt genau dann, wenn es ein $x \in \mathbb{R}^3$ gibt mit $\varphi_a(x) = x$, d.h.

$$\begin{pmatrix} -8 & -4 & -8 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} x + a = 0 \Leftrightarrow (4x_1 + 2x_2 + 4x_3) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a = 0 \Leftrightarrow (4x_1 + 2x_2 + 4x_3) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = a.$$

Also hat φ_1 einen Fixpunkt genau dann, wenn $a \in [\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}]$. Ist $a = \tau \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\tau \in \mathbb{R}$, so ist die Fixpunktmenge gegeben durch

$$E_a = \{x \in \mathbb{R}^3 : 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = \tau\}.$$

Dies ist eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.

(b) Sei $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ ein Nichtfixpunkt. Die Gerade durch P und $\varphi_a(P)$ hat die Richtung

$$\varphi_a(P) - P = (4p_1 + 2p_2 + 4p_3) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (4p_1 + 2p_2 + 4p_3 - 1) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei $4p_1 + 2p_2 + 4p_3 - 1 \neq 0$ da P kein Fixpunkt ist. Jede solche Gerade ist somit parallel zum Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die behauptete Aussage folgt nun, da P ein beliebiger Nichtfixpunkt war.