Prof. Dr. Frank Herrlich
Dr. Miriam Finster
Dipl.-Math. Anja Randecker

Herbst 2013

2 215000 008880

Lineare Algebra I/II

herausgegeben von der Fachschaft Mathematik/Informatik, umgebrochen von Manuel

---

Lineare Algebra I

I.1

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $M = \{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$. Sei weiter $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$\forall x, y \in M : d(x, y) = 0 \iff x = y\,.$$

Es bezeichne S_n die Gruppe aller Permutationen von M und

$$G = \{\sigma\colon M \to M \mid \forall x, y \in M : d(x, y) = d(\sigma(x), \sigma(y))\}\,.$$

Zeigen Sie:

a) Jedes $\sigma \in G$ ist injektiv.

b) G ist eine Untergruppe von S_n.

I.2

Gegeben seien die folgenden Untervektorräume von $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle \quad , \quad W = \left\langle \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle.$$

Bestimmen Sie für jeden der Vektorräume U, W, $U \cap W$ und $U + W$ eine Basis und seine Dimension.

I.3

Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & 2z & = & 3 \\ 2x & + & 9y & + & 6z & = & 8 \\ x & & & + & (a-1)z & = & 1 \end{array}$$

a) Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Wie viele Lösungen hat das Gleichungssystem über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ jeweils?

I.4

Seien K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U \leq V$ ein Untervektorraum. Seien weiter V^* der Dualraum von V sowie U^* der Dualraum von U.

a) Geben Sie eine Definition von V^* an.

b) Zeigen Sie, dass $U^0 = \{\varphi \in V^* \mid \forall u \in U \colon \varphi(u) = 0\}$ ein Untervektorraum von V^* ist.

c) Geben Sie einen surjektiven Vektorraumhomomorphismus von V^* nach U^* an, der U^0 als Kern hat.

d) Begründen Sie, wieso die Vektorräume V^*/U^0 und U^* isomorph sind.

I.5

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix, für die es eine natürliche Zahl k mit $A^k = I_n$ (die Einheitsmatrix) gibt.

Geben Sie ein von Null verschiedenes annulierendes Polynom für A an und weisen Sie nach, dass A diagonalisierbar ist.

Hinweis: Verwenden Sie, dass jedes nicht konstante komplexe Polynom ein Produkt von Linearfaktoren ist.

I.6

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Die Matrix $A_n = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei gegeben durch

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = 1 \text{ oder } j = 1\,, \\ a_{i-1,j} + a_{i,j-1} & \text{falls } i,j \geq 2\,. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie $\det(A_1)$, $\det(A_2)$ und $\det(A_3)$.

b) Berechnen Sie $\det(A_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Lineare Algebra II

II.1

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform $\tilde{A}$ von A.

b) Geben Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ an, so dass $\tilde{A} = S^{-1}AS$ gilt.

II.2

Sei $V = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A^\top = A\}$. Dies ist ein reeller Vektorraum der Dimension 6. Wir definieren auf $V \times V$ die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}, \quad \langle A, B \rangle = \mathrm{Spur}(AB)\,.$$

a) Weisen Sie nach, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt ist.

b) Es sei U der Untervektorraum von V, der aus den Diagonalmatrizen besteht. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U^\perp$.

II.3

Gegeben sei die Matrix

$$A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -\sqrt{14} \\ 7 & 1 & \sqrt{14} \\ \sqrt{14} & -\sqrt{14} & -6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto A\cdot v$, eine Isometrie des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie die Isometrie-Normalform B von A.

c) Geben Sie eine orthogonale Matrix S an, so dass die Gleichung $B = S^{-1}AS$ gilt.

II.4

Seien V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und Φ, Ψ zwei Endomorphismen von V. Für diese gelte

$$\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi\,.$$

Zeigen Sie:

a) Jeder Eigenraum von Φ ist unter Ψ invariant.

b) Wenn Φ und Ψ selbstadjungiert sind, dann gibt es eine Orthonormalbasis von V, die aus Eigenvektoren sowohl von Φ als auch von Ψ besteht.

II.5

Sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und $\Phi \in \mathrm{End}(V)$, so dass für alle Isometrien Ψ von V und alle $v \in V$ gilt:

$$\|\Phi(v)\| = \|\Phi(\Psi(v))\|\,.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für alle $v, w \in V$ mit $\|v\| = \|w\|$ gilt $\|\Phi(v)\| = \|\Phi(w)\|$.

b) Wenn $\Phi \neq 0$ ist, dann gibt es ein positives $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $\lambda \cdot \Phi$ eine Isometrie ist.

II.6

Im affinen Raum $\mathbb{R}^3$ seien die Quadriken (Q, F) und (Q_a, F_a) für $a \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} F &:= \quad x^2 + y^2 - z^2 - 1\,, \\ F_a &:= \quad -2x^2 - y^2 + z^2 - 4xz + 4x - 4y + az - 3\,. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die Q und Q_a affin äquivalent sind.

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die Quadriken Q und Q_a affin äquivalent als komplexe Quadriken in $\mathbb{C}^3$?

Lösungen Lineare Algebra I

Aufgabe I.1

a) Für $x, y \in M$ und $\sigma \in G$ gilt:

$$\sigma(x) = \sigma(y) \Longrightarrow d(\sigma(x), \sigma(y)) = 0 \Longrightarrow d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y.$$

Hierbei gilt die erste Implikation wegen der geforderten Eigenschaft von d, die zweite folgt aus $d(x, y) = d(\sigma(x), \sigma(y))$ und die dritte ergibt sich wieder aus der Eigenschaft von d.

Insgesamt folgt also $x = y$ aus $\sigma(x) = \sigma(y)$, und damit ist σ definitionsgemäß injektiv.

b) Da jedes $\sigma \in G$ injektiv ist und M eine endliche Menge, ist σ auch surjektiv, also bijektiv. Daher ist G in S_n enthalten.

Da die Identität auf M in G liegt, ist G nicht leer.

Schließlich gilt für alle $\sigma, \tau \in G$:

$$\begin{aligned}
\forall x, y \in M : d((\sigma \circ \tau^{-1})(x), (\sigma \circ \tau^{-1})(y)) &\overset{\text{Def. von } \circ}{=} d(\sigma(\tau^{-1}(x)), \sigma(\tau^{-1}(y))) \\
&\overset{\sigma \in G}{=} d(\tau^{-1}(x), \tau^{-1}(y)) \\
&\overset{\tau \in G}{=} d(\tau(\tau^{-1}(x)), \tau(\tau^{-1}(y))) \\
&\overset{\tau\circ\tau^{-1} = \mathrm{Id}_M}{=} d(x, y).
\end{aligned}$$

Damit liegt auch $\sigma \circ \tau^{-1}$ in G, und wir können mit dem Untergruppenkriterium schließen, dass G tatsächlich eine Untergruppe von S_n ist.

Aufgabe I.2

Wir bestimmen jeweils eine Basis von U und W durch Anwendung des Gauß-Algorithmus und schreiben dazu die gegebenen Vektoren als Zeilen in eine Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \; | \cdot (-\tfrac{1}{2})$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir können daraus ablesen, dass $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von U ist, U also Dimension 3 hat.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir können daraus ablesen, dass $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von U ist, U also Dimension 3 hat.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir können daraus ablesen, dass $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von W ist, W also Dimension 2 hat.

Der Durchschnitt von U und W hat also Dimension 0, 1 oder 2. Da die letzte Komponente eines Vektors in U immer das Doppelte seiner zweiten Komponente ist, liegt der zweite Basisvektor von W nicht in U. Man sieht hingegen sofort, dass der erste Basisvektor von W die Summe des ersten und dritten Basisvektors von U ist und damit im Durchschnitt von U und W liegt.

Also ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $U \cap W$ und damit hat $U \cap W$ Dimension 1.

Aus der Dimensionsformel $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$ folgt weiter, dass $U + W$ die Dimension 4 hat, also ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $U + W$.

Aufgabe I.3

In Matrixform lässt sich dieses lineare Gleichungssystem folgendermaßen schreiben:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & a-1 & 1 \end{array}\right)$$

Auf diese wenden wir zunächst nur solche Schritte des Gauß-Algorithmus an, die sowohl über $\mathbb{R}$ als auch über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ erlaubt sind, lösen also die Teilaufgaben a) und b) simultan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & a-1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & a-1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & a-1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

<u>Für $a = 1$</u> verschwindet hier die letzte Zeile und es ist das System mit der Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

zu lösen, das zum Beispiel $(1\ 0\ 1)^\top$ als spezielle Lösung hat. Die Lösungsmenge ist demnach $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$, wobei das Vektorraumerzeugnis über dem jeweils betrachteten Körper zu bilden ist. Über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ besitzt das LGS also drei Lösungen.

Für $a \neq 1$ können wir die letzte Zeile durch $a-1$ teilen und dann das Doppelte von der zweiten Zeile abziehen. Es entsteht

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Im Falle des Körpers der reellen Zahlen hat die Koeffizientenmatrix Rang 3 und damit gibt es genau eine Lösung. Die Lösungsmenge ist $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Im Fall des Körpers $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ hat die Koeffizientenmatrix nur Rang 2, während die erweiterte Matrix Rang drei hat. Die Lösungsmenge ist also leer, die Anzahl der Lösungen ist 0.

Aufgabe I.4

a) Es ist $V^* = \mathrm{Hom}_{K-\mathrm{VR}}(V, K)$, der Vektorraum aller Linearformen auf V.

b) Wir benutzen das Untervektorraumkriterium.

Es ist U^0 nicht leer, da die Nullabbildung darin liegt. Seien $\varphi, \psi \in U^0$ und $a \in K$. Dann gelten für alle $u \in U$ die beiden folgenden Sachverhalte:

$$\begin{aligned} (a\varphi)(u) &= a \cdot (\varphi(u)) = a \cdot 0 = 0, \\ (\varphi + \psi)(u) &= \varphi(u) + \psi(u) = 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

also $a\varphi$, $\varphi + \psi \in U^0$. Damit ist U^0 ein Untervektorraum von V^*.

c) Die Abbildung

$$\rho : V^* \to U^*, \ \varphi \mapsto \rho(\varphi) := \varphi|_U,$$

die durch die Einschränkung auf U gegeben ist, ist K-linear, denn für alle $\varphi, \psi \in V^*$ und $a \in K$ gilt:

$$\begin{array}{lll} \forall u \in U & : \rho(\varphi+\psi)(u) = \varphi(u) + \psi(u) = \rho(\varphi)(u) + \rho(\psi)(u), & \text{also } \rho(\varphi+\psi) = \rho(\varphi) + \rho(\psi) \\ \forall u \in U & : (\rho(a\varphi))(u) = a(\varphi(u)) = a(\rho(\varphi)(u)), & \text{also } \rho(a\varphi) = a\rho(\varphi). \end{array}$$

Der Kern von ρ ist

$$\{\varphi \in V^* \mid \varphi|_U = 0\} = \{\varphi \in V^* \mid \forall u \in U \colon \varphi(u) = 0\} = U^0.$$

Die Abbildung ρ ist surjektiv, da sich jede Linearform auf U zu einer Linearform auf V fortsetzen lässt. Ist nämlich ψ eine Linearform auf U, so wähle eine Basis B_U von U und ergänze sie zu einer Basis B von V. Definiere nun die Linearform $\varphi \in V^*$ durch lineare Fortsetzung der Vorschrift

$$\forall b \in B \colon \varphi(b) = \begin{cases} \psi(b), & \text{falls } b \in B_U, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann stimmt $\rho(\varphi)$ mit ψ auf den Vektoren aus B_U überein, und daher sind die beiden Linearformen gleich. Das zeigt $\psi \in \mathrm{Bild}(\rho)$.

d) Der Homomorphiesatz sagt nun, dass

$$U^* \cong V^*/\mathrm{Kern}(\rho) = V^*/U^0.$$

Aufgabe I.5

Wegen $A^k = I_n$ ist $X^k - 1$ ein annullierendes Polynom vom Grad $k > 0$, also nicht Null.

Jeder Eigenwert von A ist eine Nullstelle von $X^k - 1$. Das Minimalpolynom von A ist ein Teiler von $X^k - 1$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass A genau dann diagonalisierbar ist, wenn sein Minimalpolynom in Linearfaktoren zerfällt und keine Nullstelle davon mehrfach vorkommt. Der Hinweis sagt, dass das Minimalpolynom in Linearfaktoren zerfällt. Wir müssen nachweisen, dass keine Nullstelle mehrfach ist.

Sei z eine Nullstelle des Minimalpolynoms. Insbesondere ist $z^k = 1$, also $z \neq 0$. Wenn z mehrfache Nullstelle des Minimalpolynoms wäre, wäre sie auch eine mehrfache Nullstelle von $X^k - 1$. Um dies auszuschließen, teilen wir $X^k - 1$ durch $X - z$. Es ergibt sich mit der Formel für Partialsummen der geometrischen Reihe

$$(X^k - 1) : (X - z) = X^{k-1} + zX^{k-2} + z^2X^{k-3} + \ldots + z^{k-2}X + z^{k-1} = \sum_{l=0}^{k-1} z^l X^{k-1-l}.$$

Setzt man hier z auf der rechten Seite ein, so ergibt sich als Wert $k \cdot z^{k-1}$. Dies ist nicht 0, da $z \neq 0$ und $k \neq 0$, und daher kann z keine mehrfache Nullstelle des Minimalpolynoms sein.

Das oben genannte Kriterium für die Diagonalisierbarkeit liefert nun die gewünschte Behauptung.

Skizze einer Alternative:

Ein etwas anders gelagerter Beweis ließe sich auch mit der Jordanschen Normalform führen. Ein komplexes Jordankästchen J mit J^k = Einheitsmatrix hat selbst Länge 1, also haben alle Jordankästchen in der Jordanschen Normalform von A Länge 1, die JNF ist also eine Diagonalmatrix.

Aufgabe I.6

a) Es ist

$$\det(A_1) = \det(1) = 1, \quad \det(A_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1, \quad \det(A_3) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 1,$$

wobei wir die letzte Matrix mithilfe der Leibnizregel ausrechnen können:

$$\det(A_3) = 12 + 3 + 3 - 2 - 9 - 6 = 18 - 17 = 1.$$

b) Zieht man für $2 \leq j \leq n$ die $(j-1)$-te Spalte von A_n von der j-ten Spalte ab, so verschiebt das wegen

$$a_{i,j} - a_{i,j-1} = \begin{cases} a_{i-1,j}, & \text{falls } i \geq 2, \\ 0, & \text{falls } i = 1, \end{cases}$$

die j-te Spalte von A_n um eins nach unten, wobei oben 0 eingefügt wird und der alte letzte Eintrag wegfällt.

Macht man dies für j absteigend von n nach 2, so entsteht aus A_n eine Matrix, deren zweite bis n-te Spalte um eins nach unten verschoben wurden.

Wiederholt man dies für j absteigend von n nach 3, so werden die dritte bis n-te Spalte nochmals um eins nach unten geschoben.

Macht man dies immer weiter, zieht man also für $k = 2, \ldots, n$ jeweils für j absteigend von n nach k die $(j-1)$-te Spalte von der j-ten ab, so entsteht am Ende eine Dreiecksmatrix, die die alten ersten Spalteneinträge auf der Diagonalen hat. Aber diese sind alle 1. Da die genannten Operationen die Determinante nicht ändern, gilt schließlich

$$\det(A_n) = \det\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{2,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{3,1} & a_{2,2} & a_{1,3} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1,1} & a_{n-2,2} & \ldots & \ldots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & a_{n-1,2} & \ldots & \ldots & a_{2,n-1} & a_{1,n} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ * & 1 & \ddots & \ldots & 0 \\ * & * & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \ldots & \ddots & 1 & 0 \\ * & \ldots & * & * & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Lösungen Lineare Algebra II

Aufgabe II.1

a) Zunächst bestimmen wir das charakteristische Polynom von A:

$$\mathrm{CP}_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot I_4 - A) = (-1)^4 \cdot \det(A - \lambda \cdot I_4)$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & -2-\lambda & 1 \\ 3 & 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda+2) \cdot (\lambda-1)^3$$

Hier haben wir am Ende erst nach der 3. Spalte, dann nach der 2. Zeile und schließlich nach der 1. Spalte entwickelt.

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von CP_A, also -2 und 1. Die zugehörigen Haupträume haben die Dimensionen 1 und 3, da diese gleich der algebraischen Vielfachheit sind.

Um die Jordan'sche Normalform zu bestimmen benötigen wir auf jeden Fall die geometrischen Vielfachheiten. Die zum Eigenwert -2 ist eins, da der Hauptraum eindimensional ist. Der Eigenraum von A zum Eigenwert 1 ergibt sich wie folgt:

$$\mathrm{Eig}(A,1) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \frac{1}{3} \\ \\ \mid \cdot (-1) \end{array}$$

$$= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Dieser Raum ist eindimensional, also hat auch 1 geometrische Vielfachheit 1. Zu beiden Eigenwerten gibt es daher genau ein Jordankästchen und die Jordan'sche Normalform von A ist

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) Zur Bestimmung einer Basiswechselmatrix S benötigen wir eine passende Basis von $\mathbb{R}^4$. Dabei muss nach Aufbau von $\tilde{A}$ der erste Basisvektor aus $H(A,1) \setminus \operatorname{Kern}((A-I_4)^2)$ sein.

Es ist

$$(A-I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -9 & -1 & 10 & 0 \\ -9 & -1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A-I_4)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 0 & -27 & 0 \\ 27 & 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und man sieht, dass $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ als erster Basisvektor geeignet ist. Daraus ergibt sich der zweite Basisvektor $(A-I_4) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{Kern}((A-I_4)^2) \setminus \operatorname{Kern}(A-I_4)$ und der dritte Basisvektor $(A-I_4) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{Kern}(A-I_4)$.

Als vierten Basisvektor wählen wir einen Eigenvektor zum Eigenwert -2.

$$\operatorname{Eig}(A,-2) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \frac{1}{9} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot \frac{1}{3} \\ \\ \\ \mid \cdot (-1) \end{array} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Es bietet sich $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ als vierter Basisvektor an.

Damit erhalten wir die Basiswechselmatrix $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und für diese gilt

$\tilde{A} = S^{-1}AS$.

Aufgabe II.2

a) Wir müssen nachrechnen, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ symmetrisch, bilinear und positiv definit ist.

Die Symmetrie dieser Abbildung ist die bekannte Tatsache, dass $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$ gilt. (Diese wird zumeist im Zusammenhang mit der Ähnlichkeitsinvarianz der Spur gezeigt.)

Da die Spur eine Linearform auf $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist, folgt die Bilinearität aus den Distributivgesetzen. Da wir zudem die Symmetrie schon sichergestellt haben, langen die folgenden Rechnungen für den Nachweis der Bilinearität:

$$\begin{aligned}\forall A_1, A_2, B \in V: \quad \langle A_1 + A_2, B\rangle &= \mathrm{Spur}((A_1 + A_2)B) = \mathrm{Spur}(A_1B + A_2B)\\ &= \mathrm{Spur}(A_1B) + \mathrm{Spur}(A_2B) = \langle A_1, B\rangle + \langle A_2, B\rangle\end{aligned}$$

$$\forall A, B \in V, c \in \mathbb{R}: \quad \langle cA, B\rangle = \mathrm{Spur}(cAB) = c\mathrm{Spur}(AB) = c\langle A, B\rangle$$

Dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv definit ist sieht man so: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \neq 0$. Dann ist

$$\langle A, A\rangle = \mathrm{Spur}(A^2) = \mathrm{Spur}\begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & * & * \\ * & b^2+d^2+e^2 & * \\ * & * & c^2+e^2+f^2 \end{pmatrix} = a^2 + 2b^2 + 2c^2 + d^2 + 2e^2 + f^2.$$

Dieser Ausdruck ist als Summe von Quadraten in $\mathbb{R}$, die nicht alle 0 sind, positiv.

b) Es sei $D = \mathrm{diag}(x, y, z)$ eine Diagonalmatrix. Damit die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ orthogonal zu D ist, muss gelten:

$$0 = \langle D, A\rangle = \mathrm{Spur}(DA) = xa + yd + zf.$$

A liegt in $U^\perp$ genau dann, wenn diese Bedingung für alle D erfüllt ist, also wenn $a = d = f = 0$ gilt. Daher ist

$$U^\perp = \{\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ b & 0 & e \\ c & e & 0 \end{pmatrix} \mid b, c, e \in \mathbb{R}\}.$$

Das Skalarprodukt zweier solcher Matrizen ist

$$\langle\begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ b_1 & 0 & e_1 \\ c_1 & e_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b_2 & c_2 \\ b_2 & 0 & e_2 \\ c_2 & e_2 & 0 \end{pmatrix}\rangle = \mathrm{Spur}\begin{pmatrix} b_1b_2+c_1c_2 & * & * \\ * & b_1b_2+e_1e_2 & * \\ * & * & c_1c_2+e_1e_2 \end{pmatrix} = 2(b_1b_2 + c_1c_2 + e_1e_2).$$

Man sieht daran, dass die Matrizen

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $U^\perp$ bilden.

Aufgabe II.3

a) Es gilt:

$$A \cdot A^\top = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} = I_3,$$

und daher $A \in O(3)$. Damit ist Φ eine Isometrie.

b) Wir berechnen mit der Leibnizregel $\det(A) = \frac{1}{512}(-6+98+98+14+294+14) = 1$, außerdem gilt $\mathrm{Spur}(A) = -\frac{1}{2}$. Determinante und Spur sind Ähnlichkeitsinvarianten, und so hat die Isometrie-Normalform von A die Form

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$$

mit $1 + 2b = -\frac{1}{2}$, $b^2 + c^2 = 1$ und $c > 0$. Das ergibt $b = -\frac{3}{4}$ und $c = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

c) Wir bestimmen zunächst einen normierten Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A:

$$v_1 \in \mathrm{Kern}(8A - 8I_4) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -7 & 7 & -\sqrt{14} \\ 7 & -7 & \sqrt{14} \\ \sqrt{14} & -\sqrt{14} & -14 \end{pmatrix} \text{ z.B. } v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diesen ergänzen wir zu einer ONB von $\mathbb{R}^3$:

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren v_2, v_3 sind eine Basis der Drehebene von Φ. Wir rechnen noch aus

$$A \cdot v_3 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -\sqrt{14} \\ \sqrt{14} \\ -6 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{7}}{4}v_2 - \frac{3}{4}v_3.$$

Insbesondere ist die Basis also so sortiert, dass das Vorzeichen von c stimmt, und die orthogonale Basiswechselmatrix

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

leistet das Gewünschte.

Aufgabe II.4

a) Es sei λ ein Eigenwert von Φ. Für jeden Vektor $v \in \mathrm{Eig}(\Phi, \lambda)$ gilt dann

$$\Phi(\Psi(v)) = (\Phi \circ \Psi)(v) = (\Psi \circ \Phi)(v) = \Psi(\Phi(v)) = \Psi(\lambda v) = \lambda \cdot \Psi(v),$$

und daher ist auch $\Psi(v) \in \mathrm{Eig}(\Phi, \lambda)$. Das war zu zeigen.

b) Wenn zudem Φ und Ψ selbstadjungiert sind, so zerlegen wir zunächst mithilfe des Spektralsatzes V als orthogonale Summe der Eigenräume von Φ. Diese sind nach a) jeweils unter Ψ invariant. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von Φ und $E_i := \mathrm{Eig}(\Phi, \lambda_i)$ die zugehörigen Eigenräume.

Da die Einschränkung von Ψ auf einen invarianten Untervektorraum immer noch selbstadjungiert ist, besitzt – wieder nach dem Spektralsatz – jeder Raum E_i eine Orthonormalbasis B_i aus Eigenvektoren von Ψ, und da wir im Eigenraum von Φ sind, sind diese Vektoren auch Eigenvektoren von Φ.

Wegen $V = \bigoplus_{i=1}^k E_i$ ist $B = \bigcup_{i=1}^k B_i$ eine Basis von V und natürlich auch eine ONB, da die E_i paarweise orthogonal sind und jedes B_i eine ONB ist.

Damit ist B eine ONB von V mit den gewünschten Eigenschaften.

Aufgabe II.5

Wir bezeichnen die Dimension von V mit n.

a) Seien $v, w \in V$ von gleicher Länge.

Im Fall $v = w = 0$ ist die Behauptung klar. Seien also $v, w \neq 0$ von gleicher Länge. Wir setzen dann

$$b_1 := \frac{1}{\|v\|} v \text{ und } \tilde{b}_1 = \frac{1}{\|w\|} w$$

und wählen Orthonormalbasen

$$B = \{b_1, \ldots, b_n\} \text{ sowie } \tilde{B} = \{\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_n\}.$$

Die lineare Abbildung Ψ, die durch

$$\Psi(b_i) = \tilde{b}_i,\ 1 \leq i \leq n,$$

festgelegt wird, ist dann eine Isometrie. Es gilt

$$\Psi(v) = \Psi(|v| b_1) = |v| \tilde{b}_1 = |w| \tilde{b}_1 = w.$$

Mit dieser Erkenntnis können wir nun die Identität aus der Aufgabenstellung verwenden:

$$\|\Phi(w)\| = \|\Phi(\Psi(v))\| = \|\Phi(v)\|.$$

Das war zu zeigen.

b) Nun ist $\Phi \neq 0$, und wir wählen einen Vektor $v \in V$ mit $\Phi(v) \neq 0$. Weiter setzen wir $\lambda := \frac{\|v\|}{\|\Phi(v)\|}$.

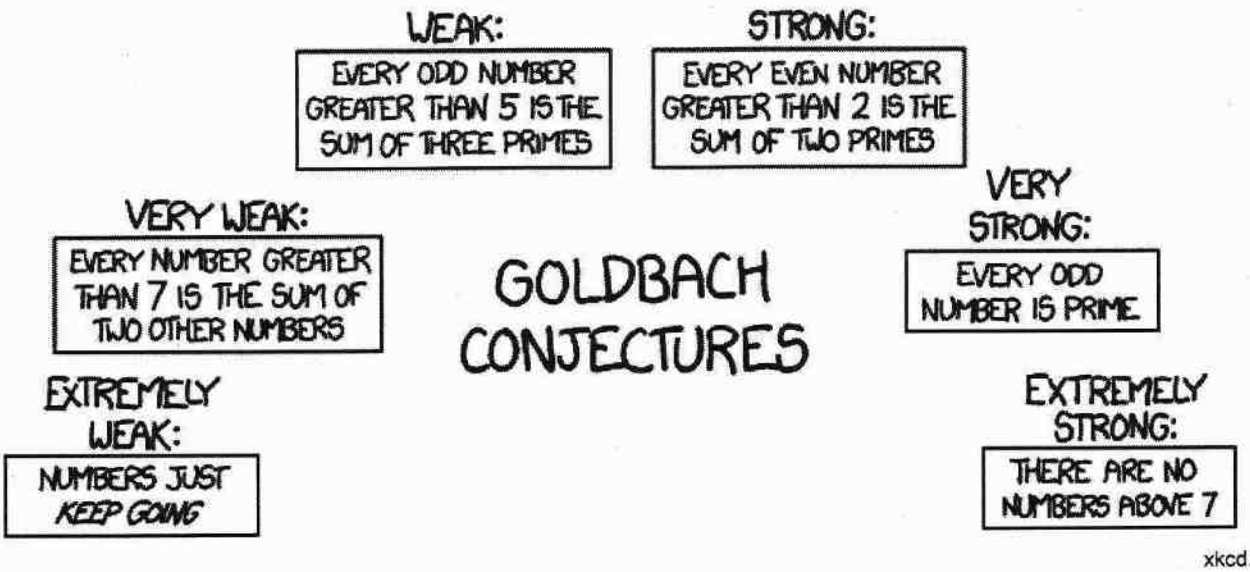
Für jedes $w \neq 0$ in V gibt es dann ein reelles $a > 0$ sodass aw dieselbe Länge hat wie v. Es folgt

$$\|\lambda\Phi(w)\| = \lambda a^{-1} \|\Phi(aw)\| \overset{\text{Teil a)}}{=} \lambda a^{-1} \|\Phi(v)\| \overset{\text{Def. von } \lambda}{=} a^{-1} \|v\| \overset{\text{Def. von } a}{=} \|w\|.$$

Da Φ als linear vorausgesetzt war, folgt nun

$$\forall x, y \in V : d(\lambda\Phi(x), \lambda\Phi(y)) = \|\lambda\Phi(x - y)\| = \|x - y\| = d(x, y),$$

also ist $\lambda\Phi$ eine Isometrie.



xkcd.com

Aufgabe II.6

a) Wir formen zunächst durch quadratische Ergänzungen das Polynom F_a um:

$$\begin{aligned}
F_a &= -2x^2 - y^2 + z^2 - 4xz + 4x - 4y + az - 3 \\
&= -(\sqrt{2}x + \sqrt{2}z - \sqrt{2})^2 + 2z^2 - 4z + 2 - y^2 + z^2 - 4y + az - 3 \\
&= -(\sqrt{2}x + \sqrt{2}z - \sqrt{2})^2 - (y+2)^2 + 4 + 3z^2 + (a-4)z - 1 \\
&= -(\sqrt{2}x + \sqrt{2}z - \sqrt{2})^2 - (y+2)^2 + \left(\sqrt{3}z + \frac{a-4}{2\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{(a-4)^2}{4\cdot 3} + 3 \\
&= -\xi^2 - \eta^2 + \zeta^2 + 3 - \frac{(a-4)^2}{4\cdot 3} \qquad (*)
\end{aligned}$$

mit $\xi = \sqrt{2}x + \sqrt{2}z - \sqrt{2}$, $\eta = y + 2$ und $\zeta = \sqrt{3}z + \frac{a-4}{2\sqrt{3}}$.

Die Signatur von F ist $(2,1)$ und die von F_a ist $(1,2)$, unabhängig von a. Die beiden Quadriken sind also genau dann reell affin äquivalent, wenn der konstante Term in $(*)$ positiv ist, also wenn

$$3 - \frac{(a-4)^2}{12} > 0.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&0 = \frac{(a-4)^2}{12} - 3 = \frac{1}{12}\left((a-4)^2 - 36\right) \\
\Leftrightarrow\ & a - 4 = \pm 6 \\
\Leftrightarrow\ & a \in \{-2, 10\}
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt $3 - \frac{(a-4)^2}{12} > 0$ genau für $a \in (-2, 10)$. Genau in diesem Fall ist (Q_a, F_a) affin äquivalent zu der reellen Quadrik (Q, F).

b) Da jede komplexe Zahl eine komplexe Quadratwurzel hat, folgt aus der Rechnung in Teil a), dass (Q_a, F_a) genau dann zu F komplex affin äquivalent ist, wenn der konstante Term in $(*)$ nicht 0 ist. Aufgrund der Nullstellenbestimmung im a)-Teil ist dies genau dann der Fall, wenn

$$a \notin \{-2, 10\}.$$