Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Dr. Malte Röer

Herbst 2014

Lineare Algebra I/II

Herausgegeben von der Fachschaft Mathematik/Informatik, umgebrochen von Jannis

Lineare Algebra I

Aufgabe I.1

Gegeben sei die Teilmenge

$$G = \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{A}} & a \\ & & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}),\ a,b \in \mathbb{Q} \right\}$$

der Gruppe $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ aller invertierbaren Matrizen in $\mathbb{Q}^{3\times 3}$ sowie die Abbildung

$$f : G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}), \quad \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{A}} & a \\ & & b \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mapsto A.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Menge G ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$.

(b) Die Abbildung $f : G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(c) Der Kern $\ker(f)$ ist isomorph zu $\mathbb{Q}^2$ mit der komponentenweisen Addition.

Aufgabe I.2

Es seien V ein Vektorraum über einem Körper K, $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear abhängige Vektoren in V, von denen je $n-1$ linear unabhängig sind.

(a) Weisen Sie nach, dass es Skalare $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ mit $\alpha_i \neq 0$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gibt, sodass

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0.$$

(b) Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K \setminus \{0\}$ wie in Teil (a) und $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in K$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = 0.$$

Zeigen Sie, dass $\lambda \in K$ existiert mit $\beta_i = \lambda \cdot \alpha_i$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Aufgabe I.3

Gegeben seien die folgenden Untervektorräume von $\mathbb{R}^4$:

$$U_1 = \langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \rangle, \qquad U_2 = \langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rangle$$

Bestimmen Sie für die Vektorräume U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ je eine Basis und die Dimension.

Aufgabe I.4

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper K und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Im Dualraum V^* von V sei die Teilmenge

$$U^0 = \{\phi \in V^* \mid \phi(u) = 0 \ \text{ für alle } \ u \in U\}$$

gegeben. Zeigen Sie:

(a) U^0 ist ein Untervektorraum von V^*.

(b) Für jedes $\phi \in U^0$ ist die Abbildung

$$\widetilde{\phi} : V/U \to K, \quad v + U \mapsto \phi(v)$$

wohldefiniert, und es gilt $\widetilde{\phi} \in (V/U)^*$.

(c) Die lineare Abbildung $f : U^0 \to (V/U)^*$, $\phi \mapsto \widetilde{\phi}$ ist ein Vektorraumisomorphismus.

Aufgabe I.5

Für $s \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A_s = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & s-2 \\ 2 & s+1 & -1 & 0 \\ 2s & s(s+1) & -s & 3 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie für alle Parameter $s \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von A_s.

(b) Für welche Parameter $s \in \mathbb{R}$ ist A_s diagonalisierbar?

(c) Bestimmen Sie für $s = 2$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A_s.

Aufgabe I.6

Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times (n+1)}$ eine Matrix mit $\operatorname{Rang}(A) = n$. Für $j \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ bezeichne A_j die $(n \times n)$-Matrix, die aus A durch Streichen der j-ten Spalte hervorgeht. Es sei weiter $w \in K^{n+1}$ der Vektor mit den Komponenten $w_j = (-1)^j \det(A_j)$ für $j \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$.

Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ gleich dem von w erzeugten Untervektorraum $\langle w \rangle$ von K^{n+1} ist.

Lineare Algebra I

Aufgabe II.1

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 0 & 2 \\ 7 & -5 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(a) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform $\widetilde{A}$ von A.

(b) Geben Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ an, sodass

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \widetilde{A}.$$

(c) Entscheiden Sie, ob es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ gibt, die dasselbe Minimalpolynom wie A besitzt und deren Jordansche Normalform von $\widetilde{A}$ verschieden ist.

Aufgabe II.2

Es sei $V = \{p \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{Grad}(p) \leq 2\}$ der Vektorraum aller Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich 2.
Für $p = a_0 + a_1X + a_2X^2$, $q = b_0 + b_1X + b_2X^2 \in V$ sei $s(p,q) \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$s(p,q) = 3a_0b_0 + 2a_0b_2 + 2a_1b_1 + 2a_2b_0 + 2a_2b_2.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $s : V \times V \to \mathbb{R}$, $(p,q) \mapsto s(p,q)$ ein Skalarprodukt ist und geben Sie dessen Fundamentalmatrix bezüglich der Basis $(1, X, X^2)$ von V an.

(b) Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von $p = X^2$ auf den Untervektorraum $U = \langle\{1, X\}\rangle \subset V$ sowie den Abstand von p zu U (jeweils bezüglich s).

(c) Geben Sie eine Orthonormalbasis von V bezüglich s an.

Aufgabe II.3

Gegeben sei die Matrix

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3}-2 & \sqrt{2} & -\sqrt{3}-2 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3}-2 & -\sqrt{2} & \sqrt{3}-2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$ eine Isometrie des euklidischen Standardraums $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist.

(b) Bestimmen Sie die euklidische Normalform $\widetilde{A}$ von A.

(c) Geben Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, sodass

$$S^{\top} \cdot A \cdot S = \widetilde{A}.$$

Aufgabe II.4

Es sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum der Dimension $n \geq 1$, und $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft

$$\langle f(x), x \rangle = 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in V.$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $x, y \in V$ gilt $\langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$.

(b) Ist $U \subset V$ ein f-invarianter Untervektorraum, so ist auch $U^{\perp}$ f-invariant.

(c) Besitzt f einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist f nicht invertierbar.

(d) Der Endomorphismus $f^2 : V \to V$, $x \mapsto f(f(x))$ ist selbstadjungiert.

(e) Es gibt eine Orthonormalbasis B von V und reelle Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \leq 0$, sodass die Abbildungsmatrix von f^2 bezüglich B gegeben ist durch

$$D_{BB}(f^2) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe II.5

Es seien V ein endlich dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum, $f, g \in \operatorname{End}(V)$ normale Endomorphismen von V sowie $f^* \in \operatorname{End}(V)$ die zu f adjungierte Abbildung. Zeigen Sie:

(a) $\ker(f) = \ker(f^*)$

(b) $\operatorname{Bild}(f) = \big(\ker(f)\big)^{\perp}$

(c) $\operatorname{Bild}(f^*) = \operatorname{Bild}(f)$.

(d) $f \circ g = 0$ ist äquivalent zu $g \circ f = 0$.

Aufgabe II.6

Für $a \in \mathbb{R}^3$ sei die Affinität $\varphi_a : \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$\varphi_a(x) = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -8 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} x + a.$$

(a) Geben Sie alle $a \in \mathbb{R}^3$ an, für welche φ_a mindestens einen Fixpunkt hat. Zeigen Sie, dass in diesen Fällen die Fixpunktmenge eine Ebene $E_a \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ ist.

(b) Es seien nun

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und $P, Q \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ Punkte, die nicht von φ_a fixiert werden. Zeigen Sie, dass die Gerade durch P und $\varphi_a(P)$ zur Geraden durch Q und $\varphi_a(Q)$ parallel ist.

Lösungen Lineare Algebra I

Aufgabe I.1
Lösungsvorschlag

(a) Wegen $I_3 \in G$ ist G nicht leer. Weiter gilt für

$$g = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A} & \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad h = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{C} & \begin{array}{c} c \\ d \end{array} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad g \cdot h = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{A \cdot C} & \begin{array}{c} e \\ f \end{array} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

wobei

$$\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2.$$

Da $A \cdot C \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, gilt also $g \cdot h \in G$.

Wir müssen noch zeigen, dass für jedes $g \in G$ auch g^{-1} in G liegt. Dazu machen wir den Ansatz $g \cdot h = I_3$ mit g, h wie oben, was äquivalent ist zu

$$A \cdot C = I_2 \quad \text{und} \quad A \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies bedeutet

$$C = A^{-1} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = -A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2.$$

Somit liegt auch $g^{-1} = h$ in G.

(b) Wir müssen zeigen, dass für alle $g, h \in G$ die Gleichung $f(g \cdot h) = f(g) \cdot f(h)$ gilt. Für $g, h \in G$ wie oben erhalten wir

$$f(g \cdot h) = A \cdot C = f(g) \cdot f(h).$$

(c) Es gilt

$$\ker(f) = \{g \in G \mid f(g) = I_2\} = \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{I_2} & \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Die Abbildung

$$i : \ker(f) \to \mathbb{Q}^2, \quad \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{I_2} & \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus, denn für

$$g = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{I_2} & \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad h = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{I_2} & \begin{array}{c} c \\ d \end{array} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \in \ker(f)$$

gilt

$$i(g \cdot h) = i\left(\left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{I_2} & \begin{array}{c} a + c \\ b + d \end{array} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \right) = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix} = i(g) + i(h).$$

Weiter ist i injektiv, denn

$$\ker(i) = \{g \in \ker(f) \mid i(g) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{I_2}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \right\}.$$

i ist auch surjektiv, denn für $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2$ beliebig erfüllt

$$g = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{I_2}} & x \\ & & y \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \in \ker(f)$$

die Bedingung $i(g) = v$. Insgesamt ist i also ein bijektiver Gruppenhomomorphismus, das heißt $\ker(f)$ ist isomorph zu $\mathbb{Q}^2$ mit der komponentenweisen Addition.

Aufgabe I.2

Lösungsvorschlag

(a) Da die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ linear abhängig sind, gibt es $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ und Skalare $\lambda_i \in K$ mit $i \in \{1, 2 \ldots, n\} \setminus \{j\}$ sodass

$$v_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \lambda_i v_i.$$

Setzt man für $i \in \{1, 2 \ldots, n\} \setminus \{j\}$ $\alpha_i = \lambda_i$ und $\alpha_j = -1$, so folgt daraus

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\alpha_i \neq 0$ gilt für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Nehmen wir also an, dass $\alpha_l = 0$ für ein $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dann folgt wegen der linearen Unabhängigkeit der $n-1$ Vektoren $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \setminus \{v_l\}$ auch $\alpha_i = 0$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{l\}$. Dies steht jedoch im Widerspruch zu $\alpha_j = -1$. Folglich gilt $\alpha_i \in K \setminus \{0\}$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(b) Nach Teil (a) gilt $v_1 = \sum_{i=2}^{n} \frac{(-\alpha_i)}{\alpha_1} v_i$, also

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = \beta_1 \Big(\sum_{i=2}^{n} \frac{(-\alpha_i)}{\alpha_1} v_i \Big) + \sum_{i=2}^{n} \beta_i v_i = \sum_{i=2}^{n} \Big(\beta_i - \alpha_i \frac{\beta_1}{\alpha_1} \Big) v_i.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der $n-1$ Vektoren $v_2, \ldots, v_n$ folgt

$$\beta_i = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \alpha_i \quad \text{für alle} \quad i \in \{2, \ldots, n\}.$$

Wegen $\beta_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \alpha_1$ folgt die Behauptung mit $\lambda = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$.

Aufgabe I.3

Lösungsvorschlag

Im Erzeugendensystem von U_1 ergibt das Doppelte des zweiten Vektors minus dem dritten Vektor genau den ersten Vektor. Indem man weiter vom zweiten Vektor zweimal den dritten Vektor abzieht erhält man

$$U_1 = \left\langle\left\{ \begin{pmatrix}2\\3\\3\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix} \right\}\right\rangle = \left\langle\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix} \right\}\right\rangle = \left\langle\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix} \right\}\right\rangle.$$

Die zwei zuletzt erhaltenen Vektoren sind linear unabhängig und bilden somit eine Basis von U_1; insbesondere ist $\dim(U_1) = 2$.

Ebenso erhält man im Erzeugendensystem von U_2 den ersten Vektor als zweifache Differenz des zweiten und dritten Vektors. Zieht man weiter das Doppelte des letzten Vektors vom zweiten ab, so ergibt sich

$$U_2 = \left\langle\left\{ \begin{pmatrix}2\\2\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}\right\rangle = \left\langle\left\{ \begin{pmatrix}2\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}\right\rangle = \left\langle\left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}\right\rangle.$$

Die beiden zuletzt erhaltenen Vektoren sind linear unabhängig und bilden somit eine Basis von U_2. Insbesondere ist $\dim(U_2) = 2$.

Für die Summe der beiden Untervektorräume haben wir also

$$U_1 + U_2 = \left\langle\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}\right\rangle.$$

Zieht man den ersten Vektor vom letzten ab und den dritten Vektor vom zweiten, so ergibt sich

$$U_1 + U_2 = \left\langle\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}\right\rangle = \left\langle\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}\right\rangle.$$

Diese drei Vektoren sind linear unabhängig, bilden also eine Basis von $U_1 + U_2$. Somit gilt $\dim(U_1 + U_2) = 3$.

Nach dem Dimensionssatz für Untervektorräume gilt $\dim(U_1 \cap U_2) = 2 + 2 - 3 = 1$; es genügt also, einen Vektor zu finden, der zugleich in U_1 und U_2 liegt. Ein solcher Vektor ist zum Beispiel die Summe der jeweiligen Basisvektoren

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Es gilt demnach

$$U_1 \cap U_2 = \langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \rangle;$$

insbesondere ist durch den obigen Vektor eine Basis des Durchschnitts gefunden.

Aufgabe I.4

Lösungsvorschlag

(a) Natürlich liegt die Nullabbildung in U^0, das heißt U^0 ist nicht leer. Nun seien $\phi, \psi \in U^0$ und $u \in U$ beliebig.

Dann ist

$$(\phi + \psi)(u) = \phi(u) + \psi(u) = 0 + 0 = 0, \quad \text{also} \quad \phi + \psi \in U^0.$$

Weiter sei $\alpha \in K$, $\phi \in U^0$, $u \in U$ beliebig. Dann gilt

$$(\alpha \cdot \phi)(u) = \alpha \cdot (\phi(u)) = \alpha \cdot 0 = 0, \quad \text{also} \quad \alpha \cdot \phi \in U^0.$$

Laut Definition ist also U^0 ein Untervektorraum von V^*.

(b) Zunächst ist $\widetilde{\phi}$ wohldefiniert, denn aus $v + U = v' + U$ folgt $u := v' - v \in U$, und damit

$$\phi(v') = \phi(v + u) = \phi(v) + \phi(u) = \phi(v), \quad \text{da} \quad \phi \in U^0.$$

Die Linearität von $\widetilde{\phi}$ ist dann klar, denn für $v_1, v_2 \in V$, $\alpha \in K$ gilt wegen der Linearität von ϕ

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}((v_1 + U) + (v_2 + U)) &= \widetilde{\phi}((v_1 + v_2) + U) = \phi(v_1 + v_2) \\ &= \phi(v_1) + \phi(v_2) = \widetilde{\phi}(v_1 + U) + \widetilde{\phi}(v_2 + U) \end{aligned}$$

und

$$\widetilde{\phi}(\alpha(v_1 + U)) = \widetilde{\phi}((\alpha v_1) + U) = \phi(\alpha v_1) = \alpha\phi(v_1) = \alpha\widetilde{\phi}(v_1 + U).$$

(c) f ist injektiv, denn für $\phi \in \ker(f)$ gilt:

$$f(\phi) = \widetilde{\phi} = 0, \quad \text{also} \quad \phi(v) = \widetilde{\phi}(v + U) = 0 \quad \forall v \in V,$$

und damit ist $\phi = 0$.

f ist surjektiv, denn für $\ell \in (V/U)^*$ betrachte die Abbildung

$$\phi : V \to K, \quad v \mapsto \ell(v + U).$$

Diese Abbildung ist linear, was man entweder direkt nachrechnet oder auf $\phi = \ell \circ \pi$ zurückführt, wobei $\pi : V \to V/U$ die kanonische Projektion ist. Und natürlich ist für $u \in U$

$$\phi(u) = \ell(u + U) = \ell(U) = 0,$$

also $\phi \in U^0$.

Aufgabe I.5

Lösungsvorschlag

(a) Wir berechnen das charakteristische Polynom von A_s indem wir zunächst nach der letzten und dann nach der ersten Zeile entwickeln:

$$\begin{aligned}
p_{A_s} &= \begin{vmatrix} s-X & 0 & 0 & s-2 \\ 2 & s+1-X & -1 & 0 \\ 2s & s(s+1) & -s-X & 3 \\ 0 & 0 & 0 & s-X \end{vmatrix} \\
&= (s-X) \cdot \begin{vmatrix} s-X & 0 & 0 \\ 2 & s+1-X & -1 \\ 2s & s(s+1) & -s-X \end{vmatrix} \\
&= (s-X)^2 \cdot \begin{vmatrix} s+1-X & -1 \\ s(s+1) & -s-X \end{vmatrix} \\
&= (X-s)^2 \cdot ((X+s)(X-(s+1)) + s(s+1)) \\
&= (X-s)^2 \cdot (X^2 - X) = X(X-1)(X-s)^2.
\end{aligned}$$

Eigenwerte von A_s sind also 0, 1 und s.

(b) A_s ist genau dann diagonalisierbar, wenn die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte übereinstimmen.

Wir berechnen also die Dimension des Eigenraums $E_s = \ker(A_s - sI_4)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & s-2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2s & s(s+1) & -2s & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & s^2 & -s & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s-2 \end{pmatrix}$$

Dabei haben wir das $(-s)$-fache der zweiten Zeile zur dritten addiert, die zweite Zeile durch 2 geteilt und schließlich die erste Zeile nach unten verschoben. Für $s \in \{0,2\}$ ist also $\dim(E_s) = 2$, ansonsten $\dim(E_s) = 1$.

Im Fall $s \notin \{0,2\}$ ist die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes s größer gleich 2, die geometrische Vielfachheit gleich 1. Somit ist A_s nicht diagonalisierbar für $s \notin \{0,2\}$.

Im Fall $s = 0$ ist die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes $s = 0$ gleich 3, A_s also ebenfalls nicht diagonalisierbar.

Im Fall $s = 2$ ist die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit des Eigenwertes $s = 2$. Für die weiteren Eigenwerte 0 und 1 ist jeweils algebraische und geometrische Vielfachheit gleich 1. Somit ist A_s genau für $s = 2$ diagonalisierbar.

(c) Wir bestimmen jeweils eine Basis der Eigenräume E_2, E_1 und E_0:

Aus Teil (b) wissen wir, dass

$$E_2 = \ker(A_2 - 2I_4) = \ker \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Subtraktion von $\frac{1}{8}$-mal der zweiten Zeile von der ersten und Divison der zweiten Zeile durch 4 ergibt

$$E_2 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Weiter berechnen wir

$$E_1 = \ker(A_2 - I_4) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Dabei haben wir geeignete Vielfache von der ersten Zeile von jeweils der zweiten und dritten abgezogen, dann das jeweils dreifache der zweiten und letzten Zeile von der dritten abgezogen und schließlich die zweite Zeile durch zwei geteilt.

Für den Eigenraum zum Eigenwert 0 erhalten wir

$$E_0 = \ker(A_2 - 0I_4) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Dabei haben wir im ersten Schritt die erste Zeile durch zwei geteilt und wieder geeignete Vielfache davon von der zweiten und dritten Zeile abgezogen. Im zweiten Schritt wurde das zweifache der zweiten und das $\frac{3}{2}$-fache der letzten Zeile von der dritten abgezogen und schließlich die zweite Zeile durch drei und die letzte Zeile durch zwei geteilt.

Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stets linear unabhängig sind, bilden die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A_2.

Aufgabe I.6

Lösungsvorschlag

Wir zeigen zunächst, dass der Vektor $w \in K^{n+1}$ eine Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ ist. Betrachte dazu für $i \in \{1, 2, \dots n\}$ die Matrix

$$B = B(i) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in+1} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in+1} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \cdots & a_{i+1n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n+1} \end{pmatrix} \in K^{(n+1)\times(n+1)},$$

deren Determinante gleich Null ist, da zwei Zeilen übereinstimmen. Entwicklung nach der i-ten Zeile liefert

$$0 = \det(B) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(B_{ij}) = (-1)^i \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} (-1)^j \det(A_j) = (-1)^i \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} w_j.$$

Dies ist genau die i-te Gleichung der Matrixgleichung $A \cdot w = 0$.

Wegen $\operatorname{Rang}(A) = n$ gilt für die Dimension der Lösungsmenge $\mathcal{L} = \ker(A)$ des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$

$$\dim(\mathcal{L}) = \dim(\ker(A)) = \dim(K^{n+1}) - \operatorname{Rang}(A) = n + 1 - n = 1.$$

Da $w \neq 0$ eine Lösung ist, folgt

$$\mathcal{L} = \langle w \rangle.$$

Ist also $x \in \mathcal{L}$, so muss ein Skalar $\lambda \in K$ existieren sodass $x = \lambda w$.

Lösungen Lineare Algebra II

Aufgabe II.1

Lösungsvorschlag

(a) Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom von A:

$$\begin{aligned} p_A &= \begin{vmatrix} 9-X & -7 & 0 & 2 \\ 7 & -5-X & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 2-X & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X) \cdot \begin{vmatrix} 9-X & -7 & 0 \\ 7 & -5-X & 0 \\ 4 & -4 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)^2 \cdot \begin{vmatrix} 9-X & -7 \\ 7 & -5-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)^2((9-X)\cdot(-5-X) + 49) = (2-X)^4. \end{aligned}$$

Hierbei wurde zunächst nach der letzten Zeile, dann nach der letzten Spalte entwickelt.

Damit wissen wir, dass 2 der einzige Eigenwert von A ist (mit algebraischer Vielfachheit 4). Es gilt nun, die geometrische Vielfachheit zu ermitteln. Diese ist die Dimensionen des Eigenraums

$$E_2 = \ker(A - 2I_4) = \ker(\begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 & 2 \\ 7 & -7 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = \ker(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})$$

$$= \langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \rangle$$

Es gibt also $\dim(E_2) = 2$ Jordankästchen zum Eigenwert 2, das heißt entweder ein (3×3)- und ein (1×1)-Kästchen, oder zwei (2×2)-Kästchen.

Um die Jordansche Normalform zu finden, genügt es den Index q des Hauptraums zum Eigenwert 2 zu bestimmen; dieser gibt die Länge des größten Jordankästchens an.

Wir berechnen also

$$\ker(A - 2I_4)^2 = \ker(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = \mathbb{R}^4,$$

das heißt $q = 2$ und damit ist die Jordansche Normalform $\widetilde{A}$ von A gegeben durch

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

(b) Zur Bestimmung einer Jordanbasis wählen wir eine Basis des Komplements von E_2 in $\ker(A - 2I_4)^2 = \mathbb{R}^4$, also zum Beispiel (e_1, e_4). Wegen

$$(A - 2I_4)e_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (A - 2I_4)e_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist $C = (\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, e_1, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4)$ eine Jordanbasis. Die gesuchte Matrix S mit der Eigenschaft $S^{-1} \cdot A \cdot S = \widetilde{A}$ ist also gegeben durch

$$S = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Das Minimalpolynom von A ist gegeben durch $(X-2)^2$. Eine Matrix mit demselben Minimalpolynom ist zum Beispiel die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

die bereits in Jordanscher Normalform vorliegt. Ganz offensichtlich ist diese von $\widetilde{A}$ verschieden.

Aufgabe II.2

Lösungsvorschlag

(a) Seien $p = a_0 + a_1X + a_2X^2$, $q = b_0 + b_1X + b_2X^2$, $r = c_0 + c_1X + c_2X^2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} s(p+r,q) = {}& 3(a_0+c_0)b_0 + 2(a_0+c_0)b_2 + 2(a_1+c_1)b_1 + 2(a_2+c_2)b_0 \\ & + 2(a_2+c_2)b_2 = 3a_0b_0 + 2a_0b_2 + 2a_1b_1 + 2a_2b_0 + 2a_2b_2 \\ & + 3c_0b_0 + 2c_0b_2 + 2c_1b_1 + 2c_2b_0 + 2c_2b_2 = s(p,q) + s(r,q) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} s(\lambda p, q) &= 3(\lambda a_0)b_0 + 2(\lambda a_0)b_2 + 2(\lambda a_1)b_1 + 2(\lambda a_2)b_0 + 2(\lambda a_2)b_2 \\ &= \lambda(3a_0b_0 + 2a_0b_2 + 2a_1b_1 + 2a_2b_0 + 2a_2b_2) = \lambda s(p,q), \end{aligned}$$

das heißt s ist linear im ersten Argument. Weiter gilt

$$\begin{aligned} s(p,q) &= 3a_0b_0 + 2a_0b_2 + 2a_1b_1 + 2a_2b_0 + 2a_2b_2 \\ &= 3b_0a_0 + 2b_2a_0 + 2b_1a_1 + 2b_0a_2 + 2b_2a_2 = s(q,p), \end{aligned}$$

das heißt s ist auch symmetrisch. Insgesamt ist s also eine symmetrische Bilinearform auf V.

Für die Fundamentalmatrix $F_C(s)$ von s bezüglich der Basis $C = (1, X, X^2)$ berechnen wir

$$F_C(s) = \begin{pmatrix} s(1,1) & s(1,X) & s(1,X^2) \\ s(X,1) & s(X,X) & s(X,X^2) \\ s(X^2,1) & s(X^2,X) & s(X^2,X^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bekanntermaßen ist s genau dann positiv definit, wenn die symmetrische Matrix $F_C(s)$ positiv definit ist. Dies folgt aus dem Hurwitz-Kriterium wegen

$$\det(F_C(s)) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (6-4) = 4 > 0,$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = 6 > 0 \quad \text{und} \quad \det((3)) = 3 > 0.$$

(b) Wie man an der linken oberen (2×2)-Matrix von $F_C(s)$ erkennen kann, ist die Basis $(1, X)$ von U eine Orthogonalbasis bezüglich s. Die Vektoren

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot X$$

bilden eine Orthonormalbasis von U. Für die Orthogonalprojektion $\Pi_U(p)$ eines Vektors $p \in V$ auf U gilt dann $\Pi_U(p) = s(p, v_1)v_1 + s(p, v_2)v_2$, das heißt für $p = X^2$

$$\Pi_U(X^2) = s(X^2, v_1)v_1 + s(X^2, v_2)v_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot X = \frac{2}{3} \cdot 1.$$

Den Abstand $d(p, U)$ von p zu U ist gegeben durch

$$\begin{aligned} d(p,U)^2 &= \|p - \Pi_U(p)\|^2 = s\big(p - \Pi_U(p), p - \Pi_U(p)\big) \\ &= s\big(X^2 - \frac{2}{3} \cdot 1, X^2 - \frac{2}{3} \cdot 1\big) \\ &= s(X^2, X^2) - \frac{2}{3}s(1, X^2) - \frac{2}{3}s(X^2, 1) + (\frac{2}{3})^2 s(1,1) \\ &= 2 - \frac{4}{3} \cdot 2 + \frac{4}{9} \cdot 3 = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

also $\quad d(p, U) = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

(c) Wir müssen die Orthonormalbasis (v_1, v_2) lediglich um einen normierten Vektor v_3 im orthogonalen Komplement $U^\perp$ von U ergänzen. Ein solcher Vektor ist nach Gram-Schmidt-Orthogonalisierung und der Rechnung in Teil (b)

$$v_3 = \frac{p - \Pi_U(p)}{\|p - \Pi_U(p)\|} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \big(X^2 - \frac{2}{3} \cdot 1\big) = \sqrt{\frac{3}{2}} X^2 - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 1.$$

Aufgabe II.3

Lösungsvorschlag

(a) f ist genau dann eine Isometrie, wenn die Matrix A orthogonal ist, das heißt wenn $A^\top \cdot A = I_4$ gilt. Dies prüft man durch Rechnung nach.

(b) Zur Bestimmung der euklidischen Normalform berechnen wir zunächst das charakteristische Polynom von A:

$$\begin{aligned} p_A = \det(A - XI_3) &= \det\Big(\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3} - 2 - 4X & \sqrt{2} & -\sqrt{3} - 2 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3} - 4X & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} - 2 & -\sqrt{2} & \sqrt{3} - 2 - 4X \end{pmatrix}\Big) \\ &= \big(\frac{1}{4}\big)^3 \det \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 2 - 4X & \sqrt{2} & -\sqrt{3} - 2 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3} - 4X & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} - 2 & -\sqrt{2} & \sqrt{3} - 2 - 4X \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \quad + \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -1 \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ \\ + \end{matrix} \\ &= \big(\frac{1}{4}\big)^3 \det \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 2 - 4X & \sqrt{2} & -\sqrt{3} - 2 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3} - 4X & \sqrt{2} \\ -4 - 4X & 0 & -4 - 4X \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{4}\right)^3 \det \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-4X & \sqrt{2} & -\sqrt{3}-2 \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{3}-4X & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -4-4X \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^3 (-4-4X) \det \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-4X & \sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{3}-4X \end{pmatrix} \\
&= -\left(\frac{1}{4}\right)^2 (X+1) \cdot \left((2\sqrt{3}-4X)^2+4\right) \\
&= -\frac{1}{16}(X+1)\cdot(16X^2-16\sqrt{3}X+16) = -(X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1).
\end{aligned}
$$

A hat also den Eigenwert -1 und, aufgefasst als unitäre Matrix in $\mathbb{C}^{3\times 3}$, ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte $\lambda, \overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ mit $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2} = \cos\omega + \mathrm{i}\sin\omega$. Die euklidische Normalform $\widetilde{A}$ von A ist damit gegeben durch

$$
\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.
$$

(c) Zur Bestimmung der orthogonalen Matrix S benötigen wir zunächst einen normierten Eigenvektor b_1 zum Eigenwert -1. Dieser berechnet sich mit Hilfe des homogenen linearen Gleichungssystems

$$
\begin{aligned}
(A+I_3) &\sim \begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 & \sqrt{2} & -\sqrt{3}-2 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{3}+4 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3}-2 & -\sqrt{2} & \sqrt{3}+2 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 & \sqrt{2} & -\sqrt{3}-2 \\ 1 & -\sqrt{2}(\sqrt{3}+2) & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2}(\sqrt{3}+2) & -1 \\ 0 & 4\sqrt{2}(\sqrt{3}+2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

zu

$$
b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Zur Berechnung der fehlenden beiden Vektoren b_2, b_3 in der gesuchten Orthonormalbasis können wir b_2 als beliebigen Einheitsvektor im orthogonalen Komplement $\langle b_1 \rangle^{\perp}$ von $\langle b_1 \rangle$ wählen. Da dieses orthogonale Komplement f-invariant ist, gilt auch $Ab_2 \in \langle b_1 \rangle^{\perp}$. Da in $\langle b_1 \rangle^{\perp}$ keine Eigenvektoren von f liegen, sind b_2 und Ab_2 linear unabhängig.

Konkret wähle man zum Beispiel

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{dann folgt } Ab_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen mit dem Gram-Schmidt-Verfahren nun eine Orthonormalbasis von $\langle b_1 \rangle^\perp = \langle \{b_2, Ab_2\} \rangle$. Der Vektor

$$\widetilde{b}_3 = Ab_2 - \langle Ab_2, b_2 \rangle b_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist orthogonal zu b_2; normieren liefert $b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Um zu sehen, ob wir gegebenenfalls die Reihenfolge der Basisvektoren (b_2, b_3) von $\langle b_1 \rangle^\perp$ vertauschen müssen, überprüfen wir ob

$$Ab_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} b_2 + \frac{1}{2} b_3$$

gilt. Dies ist tatsächlich der Fall. Somit gilt für die orthogonale Matrix

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

mit b_1, b_2, b_3 als Spaltenvektoren die Gleichung $S^\top \cdot A \cdot S = \widetilde{A}$.

Aufgabe II.4

Lösungsvorschlag

(a) Seien $x, y \in V$ beliebig. Dann gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f(x+y), x+y \rangle = \langle f(x) + f(y), x+y \rangle \\ &= \langle f(x), x \rangle + \langle f(y), x \rangle + \langle f(x), y \rangle + \langle f(y), y \rangle \\ &= \langle f(y), x \rangle + \langle f(x), y \rangle. \end{aligned}$$

Dabei haben wir nacheinander die Linearität von f, die Bilinearität des Skalarproduktes sowie die Voraussetzung an f verwendet.

(b) Sei nun $y \in U^\perp$ beliebig. Dann gilt für alle $u \in U$ wegen $f(u) \in U$

$$0 = \langle f(u), y \rangle = -\langle u, f(y) \rangle,$$

das heißt $f(y) \in U^\perp$.

(c) Sei $x \neq 0$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$0 = \langle f(x), x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle,$$

also wegen $\langle x, x \rangle > 0$ notwendigerweise $\lambda = 0$. Wegen $\ker(f) = E_0 \neq \{0\}$ ist f nicht injektiv, also insbesondere nicht invertierbar.

(d) Seien wieder $x, y \in V$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}\langle f^2(x), y\rangle &= \langle f(f(x)), y\rangle = -\langle f(x), f(y)\rangle \\ &= (-1)^2\langle x, f(f(y))\rangle = \langle x, f^2(y)\rangle.\end{aligned}$$

Somit ist f^2 selbstadjungiert.

(e) Da f^2 selbstadjungiert ist, gibt es eine Orthonormalbasis $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ aus Eigenvektoren von f^2. Für die zugehörigen Eigenwerte $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ gilt dann

$$\mu_i = \langle \mu_i b_i, b_i\rangle = \langle f^2(b_i), b_i\rangle = -\langle f(b_i), f(b_i)\rangle \leq 0 \quad \text{für alle } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts.

Aufgabe II.5

Lösungsvorschlag

(a) Für alle $x \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(x)\rangle &= \langle x, f^*(f(x))\rangle \\ &= \langle x, f(f^*(x))\rangle = \langle x, (f^*)^*(f^*(x))\rangle = \langle f^*(x), f^*(x)\rangle.\end{aligned}$$

Wegen der positiven Definitheit des Skalarproduktes ist also $f(x) = 0$ äquivalent zu $f^*(x) = 0$, das heißt $\ker(f) = \ker(f^*)$.

(b) Wir zeigen die Gleichheit $\mathrm{Bild}(f) = \big(\ker(f^*)\big)^\perp$, die für beliebige Endomorphismen von endlich dimensionalen euklidischen oder unitären Vektorräumen gilt. Daraus folgt dank Teil (a) die Behauptung.

Sei also zunächst $v \in \mathrm{Bild}(f)$ und $x \in \ker(f^*)$ beliebig. Dann gilt für $y \in V$ mit $f(y) = v$

$$0 = \langle y, f^*(x)\rangle = \langle f(y), x\rangle = \langle v, x\rangle,$$

das heißt $\mathrm{Bild}(f) \subset \big(\ker(f^*)\big)^\perp$.

Umgekehrt gilt für $x \in \big(\mathrm{Bild}(f)\big)^\perp$ beliebig

$$0 = \langle f(f^*(x)), x\rangle = \langle f^*(x), f^*(x)\rangle,$$

also wegen der positiven Definitheit des Skalarproduktes $f^*(x) = 0$. Somit folgt $\big(\mathrm{Bild}(f)\big)^\perp \subset \ker(f^*)$ und daher $\big(\ker(f^*)\big)^\perp \subset \big(\mathrm{Bild}(f)^\perp\big)^\perp = \mathrm{Bild}(f)$.

(c) Da mit f auch f^* normal ist gilt wegen Teil (b)

$$\mathrm{Bild}(f^*) = \ker(f^*)^\perp = \ker(f)^\perp = \mathrm{Bild}(f).$$

(d) $f \circ g = 0$ ist äquivalent zu $\mathrm{Bild}(g) \subset \ker(f)$. Für die orthogonalen Komplemente gilt dann $\big(\ker(f)\big)^\perp \subset \big(\mathrm{Bild}(g)\big)^\perp$, also insgesamt

$$\mathrm{Bild}(f) = \big(\ker(f)\big)^\perp \subset \big(\mathrm{Bild}(g)\big)^\perp = \Big(\big(\ker(g)\big)^\perp\Big)^\perp = \ker(g).$$

Folglich gilt auch $g \circ f = 0$.

Das gleiche Argument mit vertauschten Rollen von f und g liefert die Umkehrung.

Aufgabe II.6

Lösungsvorschlag

(a) φ_a hat einen Fixpunkt genau dann, wenn es ein $x \in \mathbb{R}^3$ gibt mit $\varphi_a(x) = x$, das heißt

$$\begin{aligned} 0 = \varphi_a(x) - x &= \begin{pmatrix} -8 & -4 & -8 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} x + a \\ &= (4x_1 + 2x_2 + 4x_3) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a. \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu

$$a = (4x_1 + 2x_2 + 4x_3) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

das heißt φ_a hat einen Fixpunkt genau dann, wenn $a \in \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$.

Für $a = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Fixpunktmenge gegeben durch

$$E_a = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = \lambda\}.$$

Dies ist eine Ebene in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$.

(b) Sei $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ ein Punkt außerhalb der Fixpunktmenge von φ_a. Die Gerade durch P und $\varphi_a(P)$ hat die Richtung

$$\begin{aligned} \varphi_a(P) - P &= (4p_1 + 2p_2 + 4p_3) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= (4p_1 + 2p_2 + 4p_3 - 1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei $4p_1 + 2p_2 + 4p_3 - 1 \neq 0$, da P kein Fixpunkt ist. Jede solche Gerade ist somit parallel zum Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die behauptete Aussage folgt nun, da P ein beliebiger Punkt war, der nicht von φ_a fixiert wird.