16.09.2016

Kühnlein und Schmidt

Lineare Algebra I, SS16

I.1 (12 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $M = \{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$. Sei weiter $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$\forall x, y \in M : d(x,y) = 0 \iff x = y\,.$$

Weiter sei

$$G = \{f\colon M \to M \mid \forall x, y \in M : d(x,y) = d(f(x), f(y))\}$$

und S_n die symmetrische Gruppe, d.h. die Menge aller bijektiven Abbildungen von M in sich mit der Komposition als Verknüpfung.

Zeigen Sie:

(a) Jedes $f \in G$ ist injektiv.

(b) $G \subseteq S_n$.

(c) G ist eine Untergruppe von S_n.

I.2 (12 Punkte)

Es sei V der reelle Vektorraum der Polynome von Grad ≤ 2. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ seien

$$W_\alpha = \{f \in V \mid f(\alpha) = 0\} \text{ und } D_\beta = \{f \in V \mid f'(\beta) = 0\},$$

wobei f' die Ableitung von f bezeichne.

(a) Geben Sie Basen von W_α, D_β und $W_\alpha \cap D_\beta$ an.

(b) Zeigen Sie, dass $V = W_\alpha + D_\beta$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

I.3 (12 Punkte)

Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & 2z & = & 3 \\ 2x & + & 9y & + & 6z & = & 8 \\ x & & & + & (a-1)z & = & 1 \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{R}$.

(b) Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Wie viele Lösungen hat das Gleichungssystem über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ jeweils?

I.4 (12 Punkte)

Sei K ein Körper und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Mit V^* bezeichnen wir den Dualraum von V.

(a) Geben Sie eine Definition für die zu B *duale Basis* B^* von V^*.

(b) Sei $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ eine weitere Basis von V sowie C^* ihre duale Basis. Weiter sei $S = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ die Basiswechselmatrix von B zu C, d. h. $c_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} b_i$ für $j \in \{1, \dots, n\}$.

Zeigen Sie, dass $(S^{-1})^\top =: A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ die Basiswechselmatrix von B^* nach C^* ist, d. h. dass $c_j^* = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i^*$ gilt für $j \in \{1, \dots, n\}$.

(c) Sei $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ eine Basis des Dualraums V^*.

Zeigen Sie, dass es eine Basis C von V gibt, sodass $C^* = \Lambda$.

I.5 (12 Punkte)

In Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ sei $A_t \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ gegeben als

$$A_t := \begin{pmatrix} 1 & -t & 2t & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie im Fall $t = 0$ Basen der Eigenräume von A_0.

(b) Bestimmen Sie für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ das charakteristische Polynom von A_t und zeigen Sie, dass es nicht von t abhängt.

(c) Ermitteln Sie die Eigenwerte von A_t für beliebiges $t \in \mathbb{R}$.

(d) Geben Sie an, für welche Werte von t die Matrix A_t diagonalisierbar ist.

I.6 (12 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei A_n die reelle $n \times n$-Matrix mit den Einträgen

$$a_{ij} = \begin{cases} i, & \text{falls } i = j - 1, \\ 1, & \text{falls } i = j, \\ -j, & \text{falls } i = j + 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Geben Sie für $n = 1, 2, 3$ die Matrix A_n explizit an und berechnen Sie die Determinante $\det(A_n)$.

(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n, dass

$$\det(A_n) = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

I.1 Lösung

(a) Sei $f \in G$. Zu zeigen ist für alle $x, y \in M$:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Dies folgt mit der gegebenen Eigenschaft von d so:

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow d(f(x), f(y)) = 0 \overset{f \in G}{\Longrightarrow} d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y.$$

(b) Sei $f \in G$. Da f nach (a) injektiv ist, hat $f(M)$ genauso viele Elemente wie M, also n Stück. Da $f(M) \subseteq M$ gilt und beide Mengen n Elemente haben, sind sie gleich. Somit ist f surjektiv, also auch bijektiv, und damit ein Element von S_n. Daher gilt $G \subseteq S_n$.

(c) Nun müssen wir zeigen, dass $G \subseteq S_n$ nicht leer sowie unter Komposition und Inversenbildung abgeschlossen ist.

Da die Identiät Id_M offensichtlich zu G gehört, ist $G \neq \emptyset$.

Für zwei Abbildungen $f, g \in G$ gilt für alle $x, y \in M$:

$$d(f \circ g(x), f \circ g(y)) = d(f(g(x)), f(g(y))) \overset{f \in G}{=} d(g(x), g(y)) \overset{g \in G}{=} d(x, y).$$

Also liegt auch $f \circ g$ in G.

Für $f \in G$ existiert f^{-1}, da f bijektiv ist. Es folgt für alle $x, y \in M$:

$$d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \overset{f \in G}{=} d(f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y))) \overset{f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_M}{=} d(x, y),$$

und damit $f^{-1} \in G$.

I.2 Lösung

(a) Das Polynom $c_0 + c_1X + c_2X^2 \in V$ liegt genau dann in W_α, wenn

$$c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 = 0.$$

Da dieses LGS in den Variablen c_0, c_1, c_2 bereits in Gauß- Normalform vorliegt, sagt der (-1)-Trick, dass die Menge

$$\{X - \alpha, \ \ X^2 - \alpha^2\}$$

eine Basis des Lösungsraumes ist, also eine Basis von W_α.

Das Polynom $c_0 + c_1X + c_2X^2 \in V$ liegt genau dann in D_β, wenn

$$c_1 + 2c_2\beta = 0.$$

Wieder liegt Gauß-Normalform vor, und der -1-Trick liefert die Basis

$$\{1, X^2 - 2\beta X\}$$

von D_β.

Da 1 in D_β aber nicht in $W_\alpha \cap D_\beta$ liegt, ist der Durchschnitt höchstens eindimensional. Andererseits liegt das von 0 verschiedene Polynom

$$(X^2 - \alpha^2) - 2\beta(X - \alpha) = (X^2 - 2\beta X) + (2\alpha - \alpha^2)$$

sowohl in W_α als auch in D_β, und daher ist

$$\{(X^2 - 2\beta X) + (2\alpha - \alpha^2)\}$$

eine Basis von $W_\alpha \cap D_\beta$.

(b) Da sowohl W_α als auch D_β Dimension 2 haben, ihr Durchschnitt jedoch Dimension 1, sagt die Dimensionsformel:

$$\dim(W_\alpha + D_\beta) = \dim(W_\alpha) + \dim(D_\beta) - \dim(W_\alpha \cap D_\beta) = 2 + 2 - 1 = 3,$$

also gilt $W_\alpha + D_\beta = V$, da beide Vektorräume dreidimensional sind und der erste ein Untervektorraum des zweiten.

I.3 Lösung

Wir fangen erst allgemein an und ziehen das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten ab, sowie die erste Zeile von der dritten. Das führt auf

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & 2z & = & 3 \\ & & 3y & + & 2z & = & 2 \\ & - & 3y & + & (a-3)z & = & -2 \end{array}$$

Nun addieren wir die zweite Zeile zur dritten und ziehen sie von der ersten ab:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & & & & & = & 1 \\ & & 3y & + & 2z & = & 2 \\ & & & & (a-1)z & = & 0 \end{array}$$

Für $a = 1$ fällt hier die letzte Zeile weg.

(a) Über $\mathbb{R}$ ergibt sich für $a = 1$ der Lösungsraum

$$\mathcal{L} = \{(1,\ y,\ 1 - \frac{3}{2}y)^\top \mid y \in \mathbb{R}\},$$

während sich für $a \neq 1$ nur eine Lösung findet

$$\mathcal{L} = \{(1, \frac{2}{3}, 0)^\top\}.$$

(b) Über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ haben wir für $a = 1$ die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \{(1,\ y,\ 1)^\top \mid y \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\}$$

mit drei Elementen. Für $a \neq 1$ ergibt sich aus der dritten Zeile $z = 0$, während die zweite Zeile $z = 1$ erzwingt: Die Lösungsmenge ist leer.

I.4 Lösung

(a) Die duale Basis besteht aus Linearformen $b_1^*, \dots, b_n^*$, wobei für $1 \leq i \leq n$ die Linearform b_i^* durch lineare Fortsetzung der Bedingungen

$$\forall 1 \leq j \leq n : b_i^*(b_j) := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

festgelegt ist.

(b) Wir definieren Linearformen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ durch

$$\lambda_j := \sum_{k=1}^{n} a_{kj} b_k^*$$

und müssen nun nachrechnen, dass $\lambda_j(c_i)$ genau dann 1 ist, wenn $i = j$, und sonst 0. Es gilt

$$\lambda_j(c_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} b_k^* (\sum_{l=1}^{n} s_{li} b_l) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{kj} s_{li} b_k^*(b_l).$$

Da aber $b_k^*(b_l)$ genau dann 1 ist, wenn $k = l$, und sonst 0, bleibt von dieser Summe nur der Teil mit $k = l$ übrig:

$$\lambda_j(c_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} s_{ki} b_k^*(b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} s_{ki}.$$

Das ist der (j, i)-te Eintrag von $A^\top \cdot S$. Wegen $A^\top = S^{-1}$ ist das genau dann 1, wenn $i = j$, und sonst 0.

Also erfüllen die Linearformen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die erforderliche Bedingung dafür, die zu C duale Basis zu sein.

Damit folgt die Behauptung.

(c) Nun sei Λ irgendeine Basis. Es gibt eine Basiswechselmatrix T von B^* nach Λ, und wir definieren nun $S := (T^{-1})^\top$. Wenn C die Basis von V ist, die aus B mit dieser Basiswechselmatrix S entsteht, dann hat laut Teil (b) die duale Basis C^* die Basiswechselmatrix $(S^{-1})^\top = T$ und stimmt folglich mit Λ überein: $\Lambda = C^*$.

Das zeigt die Behauptung.

I.5 Lösung

(a) Für $t = 0$ sieht man die Eigenwerte 1 und 2, da die Matrizen $A - I_4$ und $A - 2I_4$ jeweils eine Nullzeile haben und damit nicht vollen Rang. Die Eigenräume zu den Eigenwerten 1 bzw. 2 sind die Kerne der Matrizen

$$A_0 - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } A_0 - 2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beide Matrizen haben Rang 2 und damit zweidimensionale Kerne. Basen der Eigenräume sind zum Beispiel

$$B_1 := \{(1, -1, 0, 0)^\top,\ (0, 1, 1, 0)^\top\} \text{ bzw. } B_2 := \{(0, 2, 1, 0)^\top,\ (0, 0, 1, 2)^\top\}.$$

Da wir zwei zweidimensionale Eigenräume haben, kann es nicht mehr Eigenwerte als die beiden gefundenen geben.

(b) Wir bestimmen das charakteristische Polynom $CP_{A_t}(X) = \det(XI_4 - A_t)$ und beginnen mit der Entwicklung nach der vierten Zeile:

$$CP_{A_t}(X) = (X - 2) \cdot \det(\begin{pmatrix} X-1 & t & -2t \\ -2 & X-3 & 2 \\ -1 & -1 & X \end{pmatrix}).$$

Wir entwickeln die verbliebene Determinante nach der ersten Zeile und sehen

$$\begin{aligned} CP_{A_t}(X) &= (X-2) \cdot [(X-1) \cdot ((X-3)X + 2) \ - t \cdot (-2X + 2) \ - 2t \cdot (2 + X - 3)] \\ &= (X-2) \cdot (X-1) \cdot (X^2 - 3X + 2) = (X-1)^2 (X-2)^2. \end{aligned}$$

Dies hängt nicht mehr von t ab, also haben alle A_t dieselben Eigenwerte mit denselben algebraischen Vielfachheiten.

(c) Wegen (b) haben alle Matrizen A_t dieselben Eigenwerte wie A_0, also 1 und 2.

(d) Wir wissen schon aus (a), dass im Fall $t = 0$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A_0 existiert, dass also A_0 nach einem aus der Vorlesung bekannten Kriterium diagonalisierbar ist.

Nun kontrollieren wir den Eigenraum zum Eigenwert 1 von A_t für allgemeines t. Die algebraische Vielfachheit ist nach (b) und (a) stets 2. Der Eigenraum ist der Kern der Matrix

$$A_t - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & -t & 2t & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese hat offensichtlich für $t \neq 0$ Rang 3, und damit ist der Eigenraum eindimensional, weswegen algebraische und geometrische Vielfachheit des Eigenwertes 1 nicht übereinstimmen.

Das zeigt, dass A_t für $t \neq 0$ nicht diagonalisierbar ist.

Damit ist $t = 0$ der einzige Wert, für den A_t diagonalisierbar ist.

I.6 Lösung

(a) Wir sehen die Matrizen

$$A_1 = (1), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \det(A_1) &= 1, \\ \det(A_2) &= 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 1 + 1 = 2, \\ \det(A_3) &\overset{Sarrus}{=} 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 + 0 - 0 - (-2) \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 = 1 + 4 + 1 = 6. \end{aligned}$$

(b) Wir zeigen für alle natürlichen n die Behauptung $\det(A_k) = k!$ für $1 \leq k \leq n$. Aufgrund von (a) wissen wir, dass dies für $n = 1, 2, 3$ zutrifft.

Induktionsannahme: Sei $n \geq 2$ fest und $\det(A_k) = k!$ wahr für alle $k \leq n$.

Induktionsbehauptung: $\det(A_k) = k!$ für alle $k \leq n + 1$.

Begründung: Nur $\det(A_{n+1}) = (n + 1)!$ ist zu zeigen. Für $v = (0 \dots 0\ n)^\top \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\det(A_{n+1}) = \det(\begin{pmatrix} A_n & v \\ -v^\top & 1 \end{pmatrix} \overset{Entw.\ letzte\ Spalte}{=} \det(A_n) - n \cdot \det(B),$$

wobei mit $w = (0 \dots 0\ (n-1))^\top \in \mathbb{R}^{n-1}$ gilt:

$$B = \begin{pmatrix} A_{n-1} & w \\ 0 & -n \end{pmatrix}.$$

Daher ist wieder mit Entwicklung der Determinante, nun nach der letzten Zeile:

$$\det(B) = -n \cdot \det(A_{n-1}).$$

Unter Ausnutzung der Induktionsannahme für $k = n$ und $k = n - 1$ folgt dann

$$\det(A_{n+1}) = \det(A_n) + n^2 \det(A_{n-1}) = n! + n \cdot n! = (n + 1) \cdot n! = (n + 1)!.$$

Damit ist alles gezeigt.