

Leuzinger, Link
Lineare Algebra 1

Dauer: 120 min.
Bemerkungen: Nachklausur

Lösung: offiziell

Aufgabe I.1

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $GL_n(\mathbb{Q})$ die Gruppe aller invertierbaren Matrizen in $\mathbb{Q}^{n \times n}$. Gegeben sei die Teilmenge

$$G = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \mid A \in GL_2(\mathbb{Q}), a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

von $GL_3(\mathbb{Q})$ sowie die Abbildung

$$\Phi : G \rightarrow GL_2(\mathbb{Q}), \quad \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \mapsto A.$$

Zeigen Sie:

- Die Menge G ist eine Untergruppe von $GL_3(\mathbb{Q})$.
- Die Abbildung $\Phi : G \rightarrow GL_2(\mathbb{Q})$ ist ein Gruppenhomomorphismus.
- Der Kern von Φ ist isomorph zu \mathbb{Q}^2 mit der komponentenweisen Addition.

Aufgabe I.2

Es sei $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ und

$$L_A : \mathbb{C}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}, \quad X \mapsto A \cdot X,$$

die Abbildung, die durch Linksmultiplikation mit A gegeben ist.

- Zeigen Sie, dass L_A (für festes A) ein Endomorphismus des Vektorraumes $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ der komplexen 2×2 -Matrizen ist.
- Es sei nun

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von L_A bezüglich der geordneten Basis

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Bestimmen Sie für die Matrix A wie in Teil (b) eine Basis von $\text{Kern}(L_A)$ und eine Basis von $\text{Bild}(L_A)$.

Aufgabe I.3

Gegeben sei das folgende Gleichungssystem mit $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} b \cdot x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 + a \cdot x_3 &= 1 \\ x_1 + 3 \cdot x_3 &= 1 \end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für $a = 3$ und $b = 1$.
- (b) Bestimmen Sie jeweils alle $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, so dass das Gleichungssystem
- keine Lösung,
 - genau eine Lösung bzw.
 - unendlich viele Lösungen hat.

Aufgabe I.4

Es seien \mathbb{K} ein Körper, V, W endlich dimensionale \mathbb{K} -Vektorräume und $\Phi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

- (i) Φ ist surjektiv.
- (ii) Für jede Linearform $\beta : W \rightarrow \mathbb{K}$ gilt:
Ist $\beta \circ \Phi : V \rightarrow \mathbb{K}$ die Nullabbildung, so ist β die Nullabbildung.

Aufgabe I.5

Es seien V ein Vektorraum über einem Körper \mathbb{K} und Φ ein Endomorphismus von V .

- (a) Geben Sie eine Definition der Begriffe „Eigenwert“ und „Eigenvektor“ an.
- (b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
1. Gilt $\Phi^2 = \Phi$, so hat Φ keine Eigenwerte außer 0 und 1.
 2. Hat Φ^2 den Eigenwert λ^2 , so hat Φ den Eigenwert λ .
 3. Ist Φ bijektiv und λ Eigenwert von Φ , so ist λ^{-1} Eigenwert von Φ^{-1} .

Aufgabe I.6

Es seien $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Determinante der beiden Matrizen

$$A_n := \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1 + \alpha_2 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1} & \cdots & \ddots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_n & \alpha_n & \alpha_n & \cdots & 1 + \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

und $B_n = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{falls } i = j, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe I.1

(a) Wegen $I_3 \in G$ ist G nicht leer. Weiter gilt für

$$g = \left(\begin{array}{cc|c} A & \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad h = \left(\begin{array}{cc|c} C & \begin{matrix} c \\ d \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad g \cdot h = \left(\begin{array}{cc|c} A \cdot C & \begin{matrix} e \\ f \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

wobei

$$\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2.$$

Da $A \cdot C \in \text{GL}_2(\mathbb{Q})$, gilt also $g \cdot h \in G$.

Wir müssen noch zeigen, dass für jedes $g \in G$ auch g^{-1} in G liegt. Dazu machen wir den Ansatz $g \cdot h = I_3$ mit g, h wie oben, was äquivalent ist zu

$$A \cdot C = I_2 \quad \text{und} \quad A \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies bedeutet

$$C = A^{-1} \in \text{GL}_2(\mathbb{Q}) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = -A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2.$$

Somit liegt auch $g^{-1} = h$ in G .

(b) Wir müssen zeigen, dass für alle $g, h \in G$ die Gleichung $\Phi(g \cdot h) = \Phi(g) \cdot \Phi(h)$ gilt. Für $g, h \in G$ wie oben erhalten wir

$$\Phi(g \cdot h) = A \cdot C = \Phi(g) \cdot \Phi(h).$$

(c) Es gilt

$$\ker(\Phi) = \{g \in G \mid \Phi(g) = I_2\} = \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} I_2 & \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Die Abbildung

$$i: \ker(\Phi) \rightarrow \mathbb{Q}^2, \quad \left(\begin{array}{cc|c} I_2 & \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus, denn für

$$g = \left(\begin{array}{cc|c} I_2 & \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad h = \left(\begin{array}{cc|c} I_2 & \begin{matrix} c \\ d \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \in \ker(\Phi)$$

gilt

$$i(g \cdot h) = i\left(\begin{array}{cc|c} I_2 & \begin{matrix} a+c \\ b+d \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix} = i(g) + i(h).$$

Aufgabe I.2

- (a) Für beliebige Matrizen $X, Y \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ gilt wegen des Distributivgesetzes im Matrizenring

$$L_A(X + Y) = A(X + Y) = AX + AY = L_A(X) + L_A(Y).$$

Wenn weiter $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Skalar ist, so gilt $A\lambda = \lambda A$ und damit für beliebiges X wie oben

$$L_A(\lambda X) = A \cdot (\lambda X) = (A\lambda)X = \lambda(AX) = \lambda L_A(X).$$

Das zeigt die Linearität von L_A .

- (b) Benennen wir die vier Matrizen in der Reihenfolge des Auftretens mit b_1, b_2, b_3 und b_4 , so müssen wir nun für alle j die Matrix Ab_j schreiben als $Ab_j = \sum_{i=1}^4 c_{ij}b_i$, und erhalten dabei die Abbildungsmatrix (c_{ij}) .

Es gilt zum Beispiel

$$Ab_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 2 \cdot b_3 + 0 \cdot b_4$$

und analog für die anderen Basisvektoren. Die Abbildungsmatrix ist

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

- (c) Der Rang von C ist 2, also haben Kern und Bild von L_A jeweils Dimension 2.

Die Menge $\{2b_1 + b_3, 2b_2 + b_4\}$ ist eine zweielementige linear unabhängige Teilmenge des Kerns, also eine Basis davon.

Die Menge $\{b_1 - 2b_3, b_2 - 2b_4\}$ ist eine zweielementige linear unabhängige Teilmenge des Bildes, also eine Basis davon.

Aufgabe I.3

Der Gaußalgorithmus liefert für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} b & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow -b \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow -2 \\ \leftarrow -2 \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & a-6 & -1 \\ 0 & 1 & 1-3b & 1-b \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow -1 \\ \leftarrow + \end{array} \\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & a-6 & -1 \\ 0 & 0 & 7-a-3b & 2-b \end{pmatrix}.$$

- (a) Im Spezialfall $a = 3$ und $b = 1$ erhalten wir das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow -3 \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow + \\ \leftarrow 3 \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

das heißt die Lösungsmenge besteht aus dem Vektor $(-2 \ 2 \ 1)^\top$.

- (b)
- Das LGS ist nicht lösbar falls $7 - a - 3b = 0$ und $2 - b \neq 0$, da dann die letzte Zeile des LGS nicht erfüllt sein kann. Die Bedingung ist äquivalent zu $a + 3b = 7$ und $b \neq 2$.
 - Das LGS hat genau eine Lösung, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix und gleich 3 ist. Dies ist genau dann der Fall wenn $a + 3b \neq 7$.
 - Unendlich viele Lösungen erhalten wir, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix und kleiner gleich 2 ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $b = 2$ und $a + 3b = 7$ gilt, d.h. für $(a, b) = (1, 2)$.

Aufgabe I.4

(i) \implies (ii)

Ist $\beta \circ \Phi : V \rightarrow \mathbb{K}$ die Nullabbildung, so gilt $(\beta \circ \Phi)(v) = 0$ für alle $v \in V$. Angenommen $\beta : W \rightarrow \mathbb{K}$ ist nicht die Nullabbildung. Dann gibt es $w \in W$ mit $\beta(w) \neq 0$. Da Φ surjektiv ist, gibt es $v \in V$ mit $\Phi(v) = w$; für dieses v gilt dann

$$(\beta \circ \Phi)(v) = \beta(w) \neq 0,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $\beta \circ \Phi = 0$.

(ii) \implies (i)

Es sei $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ eine Basis von V , $C = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ eine Basis von $\text{Bild}(\Phi) \subset W$ (nach dem Dimensionssatz gilt $m \leq n$). Angenommen, Φ ist nicht surjektiv. Dann lässt sich C zu einer Basis $(c_1, c_2, \dots, c_m, \dots, c_k)$ von W ergänzen, wobei $k \geq m + 1$. Betrachte die Linearform $\beta : W \rightarrow \mathbb{K}$, die definiert ist durch

$$\begin{aligned} \beta(c_i) &= 0 \quad \text{für } i \leq m, \\ \beta(c_j) &= 1 \quad \text{für } j \geq m + 1. \end{aligned}$$

Dann gilt für jedes $v \in V$ $(\beta \circ \Phi)(v) = \beta(0) = 0$, das heißt $\beta \circ \Phi : V \rightarrow \mathbb{K}$ ist die Nullabbildung. Da $\beta : W \rightarrow \mathbb{K}$ aber nicht die Nullabbildung ist, erhalten wir einen Widerspruch zur Voraussetzung.

Aufgabe I.5

- (a) $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt *Eigenwert* von Φ , wenn es einen Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ gibt mit der Eigenschaft

$$\Phi(v) = \lambda \cdot v.$$

Ein Vektor $v \in V$ heißt *Eigenvektor* von Φ , wenn $v \neq 0$ und es ein $\lambda \in \mathbb{K}$ gibt mit $\Phi(v) = \lambda \cdot v$.

- (b) 1. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von Φ , $v \in V \setminus \{0\}$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt $\Phi(v) = \lambda v$ und $\Phi^2(v) = \Phi(\lambda v) = \lambda^2 v$, also nach Voraussetzung $\lambda = \lambda^2$ oder äquivalent

$$\lambda(\lambda - 1) = 0.$$

Es folgt also $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ und damit ist die Aussage bewiesen.

2. Diese Aussage ist im Allgemeinen falsch: Betrachtet man $\Phi = -\text{id}_V$, so hat Φ als einzigen Eigenwert $\lambda = -1$. $\Phi^2 = \text{id}_V$ hat als einzigen Eigenwert $1 = 1^2$. Für einen Körper \mathbb{K} mit Charakteristik ungleich 2 ist aber 1 kein Eigenwert von $\Phi = -\text{id}_V$.
3. Da Φ injektiv ist, gilt $\{0\} = \ker(\Phi) = \ker(\Phi - 0 \cdot \text{id}_V)$, das heißt 0 ist kein Eigenwert von Φ .

Sei also $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ein Eigenwert von Φ , $v \in V \setminus \{0\}$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt für die Umkehrabbildung Φ^{-1} nach Definition

$$v = (\Phi^{-1}(\Phi(v))) = \Phi^{-1}(\lambda v) = \lambda \Phi^{-1}(v),$$

wobei wir im letzten Schritt die Linearität von Φ^{-1} ausgenutzt haben. Daraus ergibt sich wegen $\lambda \neq 0$ $\Phi^{-1}(v) = \lambda^{-1}v$, das heißt v ist Eigenvektor von Φ^{-1} zum Eigenwert λ^{-1} . Insbesondere ist also λ^{-1} Eigenwert von Φ^{-1} .

Aufgabe I.6

Wir ziehen zunächst die erste Spalte von A_n von allen anderen ab und erhalten

$$\det(A_n) = \det \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \alpha_2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \alpha_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat die alte erste Spalte von A_n und ab Spalte 2 die folgenden Einträge: 1 auf der Diagonalen, -1 in der ersten Zeile und 0 sonst.

Zieht man hier für $i \in \{2, \dots, n\}$ das α_i -fache der i -ten Spalte von der ersten ab, so ergibt sich am Ende $\det(A_n)$ als Determinante einer oberen Dreiecksmatrix:

$$\det(A_n) = \det \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \dots + \alpha_n & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Setzt man hier alle $\alpha_i = -1$, so ist $A_n = -B_n$. Das liefert

$$\det(B_n) = \det(-A_n) = (-1)^n \det(A_n) = (-1)^n (1 - n).$$