Sauer, Link

Lineare Algebra 1

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 17 P.
Bemerkungen: Nachklausur

Notationen

Für $n \in \mathbb{N}$ und einen Körper K bezeichnet
$M_n(K)$ den Vektorraum der $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen in K, und
$\mathrm{GL}_n(K) \subset M_n(K)$ die Teilmenge der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen.

Aufgabe 1 **(2+6 Punkte)**

Es seien K ein Körper, V, W K-Vektorräume und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

(a) Wie ist die zu f duale Abbildung f^* definiert?

Sei nun V endlich-dimensional und $W = V$. Welche der folgenden Aussagen sind immer wahr? Begründen Sie Ihre Antwort mit Beweis oder Gegenbeispiel.

(b) Ist $\ker(f) = \{0\}$, so folgt $\ker(f^*) = \{0\}$.

(c) Ist $f^2 := f \circ f = 0$, so gilt $f = 0$.

(d) $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.

(e) $\ker(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{0\}$.

(f) Es gilt $V/\ker(f) \cong \mathrm{Bild}(f)$.

(g) Es gilt $V/\mathrm{Bild}(f) \cong \ker(f)$.

Aufgabe 2 **(3+5 Punkte)**

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

(a) Seien $v_1, v_2, v_3 \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K \setminus \{0\}$, sodass $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0$ gilt. Zeigen Sie:
$$\langle\{v_1, v_2\}\rangle = \langle\{v_1, v_3\}\rangle.$$

(b) Seien $v_1, ..., v_n \in V \setminus \{0\}$ paarweise verschiedene Vektoren. Zeigen Sie:
Die Menge $\{v_1, ..., v_n\}$ ist genau dann linear unabhängig, wenn
$$\langle\{v_1, ..., v_s\}\rangle \cap \langle\{v_{s+1}, ..., v_n\}\rangle = \{0\}$$
gilt für alle $1 \leq s < n$.

Aufgabe 3 **(2+3+3 Punkte)**

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ und sei $f := L(A)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto A \cdot x$ die zugehörige lineare Abbildung.

(a) Welche geometrische Interpretation besitzt die Abbildung f?

(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bezüglich der geordneten Basis $B := (e_2, e_1 - e_2)$ von $\mathbb{R}^2$.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\mathrm{Spur}(A^{2n}) = 2 \cdot (-1)^n \cdot 9^n \quad \text{und} \quad \det(A^n) = 9^n.$$

Aufgabe 4 **(3+3+2 Punkte)**

Gegeben seien der Körper $\mathbb{F}_5 := \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und die Untervektorräume

$$U = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{4} \\ \overline{3} \\ \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{3} \\ \overline{2} \\ \overline{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{2} \\ \overline{1} \\ \overline{1} \\ \overline{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{3} \\ \overline{2} \\ \overline{4} \\ \overline{3} \end{pmatrix} \right\} \right\rangle, \; W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{2} \\ \overline{1} \\ \overline{4} \\ \overline{3} \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \subset \mathbb{F}_5^4.$$

(a) Bestimmen Sie je eine Basis von U, W und $U + W$.

(b) Welche Dimension haben die Untervektorräume U, W, $U + W$ und $U \cap W$? Geben Sie eine Basis von $U \cap W$ an.

(c) Bestimmen Sie eine Basis des Quotientenvektorraums $\mathbb{F}_5^4/U$.

Aufgabe 5 **(3+3+2 Punkte)**

In Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ sei die folgende Matrix gegeben:

$$A_t = \begin{pmatrix} 6 & -10-3t & 10+t & t-2 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

(a) Zeigen Sie, dass für die Menge der Eigenwerte $\operatorname{spec}_{\mathbb{R}}(A_t) = \{1, 2\}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass A_t genau dann diagonalisierbar ist, wenn $t = 0$ gilt.

(c) Geben Sie im Fall $t = 0$ eine Matrix $S \in GL_4(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in M_4(\mathbb{R})$ an, sodass $S^{-1} \cdot A_0 \cdot S = D$ gilt.

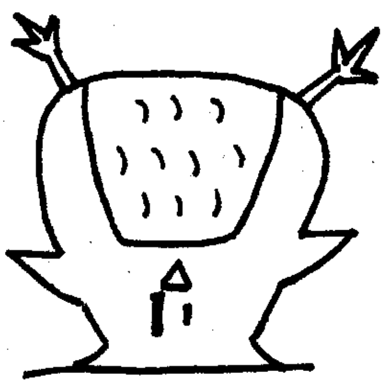
Aufgabe 6 **(5+3 Punkte)**

Seien $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ quadratische Matrizen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für das Matrixprodukt $A \cdot B$ gilt $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Hinweis: Sie dürfen den Eindeutigkeitssatz für die Determinante verwenden.

(b) Besitzt A nur ganzzahlige Einträge, und ist $\det A \in \{+1, -1\}$, dann hat auch A^{-1} nur ganzzahlige Einträge.



Aufgabe 1 **(2+6 Punkte)**

Lösungsvorschlag

(a) Die zu f duale Abbildung $f^*: W^* \to V^*$ ist definiert durch

$$f^*(\varphi) = \varphi \circ f$$

für alle $\varphi \in W^* = \hom_K(W, K)$. $f^*(\varphi)$ ist offensichtlich ein Element aus $V^* = \hom_K(V, K)$.

(b) Die Behauptung ist wahr: Nach einem Satz der Vorlesung gilt $\mathrm{rk}(f) = \mathrm{rk}(f^*)$. Aus dem Dimensionssatz für lineare Abbildungen folgt

$$\dim V = \dim\big(\ker(f)\big) + \mathrm{rk}(f), \quad \dim V^* = \dim\big(\ker(f^*)\big) + \mathrm{rk}(f^*),$$

also wegen $\dim V = \dim V^*$ und $\mathrm{rk}(f) = \mathrm{rk}(f^*)$

$$\dim\big(\ker(f)\big) = \dim\big(\ker(f^*)\big).$$

Aus $\ker(f) = \{0\}$ folgt $\dim\big(\ker(f^*)\big) = \dim\big(\ker(f)\big) = 0$, also $\ker(f^*) = \{0\}$.

(c) Die Aussage ist falsch, wie man am Beispiel der Abbildung

$$f: K^2 \to K^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erkennt.

(d) Die Behauptung ist wahr: Sei $x \in \ker(f)$ beliebig. Dann gilt

$$f^2(x) = f\big(f(x)\big) = f(0) = 0,$$

denn $x \in \ker(f)$, und jede lineare Abbildung bildet den Nullvektor auf den Nullvektor ab.

(e) Die Behauptung ist falsch, wie man am Beispiel der Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

erkennt: Hier ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker(f) \cap \mathrm{Bild}(f).$$

(f) Dies gilt nach dem Isomorphiesatz für lineare Abbildungen. Der Isomorphismus ist hier kanonisch.

(g) Nach dem Dimensionssatz für Quotientenvektorräume beziehungsweise lineare Abbildungen gilt

$$\dim V = \dim\big(V/\,\mathrm{Bild}(f)\big) + \mathrm{rk}(f), \quad \dim V = \dim\big(\ker(f)\big) + \mathrm{rk}(f),$$

das heißt $\dim\big(V/\,\mathrm{Bild}(f)\big) = \dim\big(\ker(f)\big)$. Da zwei endlich-dimensionale Vektorräume gleicher Dimension stets isomorph sind, folgt die Behauptung.

Aufgabe 2 (3+5 Punkte)
Lösungsvorschlag

(a) Seien $v_1, v_2, v_3 \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K \setminus \{0\}$, sodass

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0$$

gilt. Offensichtlich ist $v_1 \in \langle\{v_1, v_3\}\rangle$. Weiterhin ist

$$v_2 = \lambda_2^{-1} \cdot (-\lambda_1 \cdot v_1 - \lambda_3 \cdot v_3) = -\lambda_2^{-1} \cdot \lambda_1 \cdot v_1 - \lambda_2^{-1} \cdot \lambda_3 \cdot v_3$$

eine Linearkombination von Vektoren aus $\{v_1, v_3\}$. Damit ist $\langle\{v_1, v_3\}\rangle$ ein Untervektorraum von V, der sowohl v_1 als auch v_2 enthält. Da aber $\langle\{v_1, v_2\}\rangle$ der *kleinste* solche Untervektorraum von V ist, muss schon $\langle\{v_1, v_2\}\rangle \subset \langle\{v_1, v_3\}\rangle$ gelten.

Die andere Inklusion „$\supset$" zeigt man analog.

(b) Seien $v_1, \ldots, v_n \in V \setminus \{0\}$ paarweise verschieden.
„$\Rightarrow$": Die Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sei linear unabhängig. Sei $1 \leq s < n$ beliebig. Da $\langle\{v_1, ..., v_s\}\rangle \cap \langle\{v_{s+1}, ..., v_n\}\rangle$ ein Untervektorraum von V ist, enthält er bereits 0. Wir müssen also zeigen, dass alle Elemente des obigen Untervektorraums 0 sind. Sei $x \in \langle\{v_1, ..., v_s\}\rangle \cap \langle\{v_{s+1}, ..., v_n\}\rangle$. Dann liegt x in beiden Erzeugnissen, also existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ sodass $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i = x = \sum_{j=s+1}^{n} \lambda_j v_j$. Subtraktion liefert

$$0 = x - x = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i - \sum_{j=s+1}^{n} \lambda_i v_i.$$

Dies ist eine Linearkombination des Nullvektors. Damit folgt aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $\{v_1, \ldots, v_n\}$, dass $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ gilt. Also ist auch $x = 0$.
„$\Leftarrow$" (via Kontraposition): Angenommen, die Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ist linear abhängig. Dann existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ sodass $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$ und mindestens eines der λ_i ist nicht 0. Sei $1 \leq s \leq n$ der erste Index, sodass $\lambda_s \neq 0$. Dann ist

$$0 \neq \lambda_s v_s = -\sum_{i=s+1}^{n} \lambda_i v_i.$$

Weiter muss $s < n$ gelten, da sonst die rechte Summe gleich 0 wäre, im Widerspruch zu $\lambda_s v_s \neq 0$.

Es folgt $\lambda_s v_s \in \langle\{v_1, \ldots, v_s\}\rangle$ und $\lambda_s v_s \in \langle\{v_{s+1}, \ldots, v_n\}\rangle$, also ist der Schnitt der beiden Untervektorräume nicht trivial.

Aufgabe 3 (2+3+3 Punkte)
Lösungsvorschlag

(a) Die gegebene lineare Abbildung beschreibt die Komposition einer Drehung um 90° im Gegenuhrzeigersinn (mit Zentrum im Ursprung) gefolgt von einer Streckung um den Faktor 3.

(b) Wir berechnen nacheinander die Bilder der Vektoren aus B und schreiben diese als Linearkombination der Vektoren von B:

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -3e_1 = -3e_2 + (-3)(e_1 - e_2),$$

$$f(e_1 - e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3e_1 + 3e_2 = 6e_2 + 3(e_1 - e_2).$$

Die darstellende Matrix von f bezüglich der Basis $B = (e_2, e_1 - e_2)$ ist also gegeben durch

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Es ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad A^{2n} = \begin{pmatrix} (-9)^n & 0 \\ 0 & (-9)^n \end{pmatrix},$$

also $\operatorname{Spur}(A^{2n}) = (-9)^n + (-9)^n = 2 \cdot \big((-9)^n\big) = 2 \cdot (-1)^n \cdot 9^n$.

Weiter gilt nach dem Determinanten-Multiplikationssatz wegen $\det A = 0 - (-9) = 9$

$$\det(A^n) = \big(\det A\big)^n = 9^n.$$

Aufgabe 4 **(3+3+2 Punkte)**

Lösungsvorschlag

(a) Wir wenden den Gauß-Algorithmus auf die Matrix an, die als Zeilen die U erzeugenden Vektoren enthält:

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{3} & \overline{2} & \overline{4} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{3} & \overline{2} & \overline{4} & \overline{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} \overline{4}\ \overline{3}\ \overline{2} \\ + \\ + \\ + \end{matrix} \leadsto \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{4} & \overline{3} \\ \overline{0} & \overline{3} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid \cdot \overline{2} \\ \\ \end{matrix}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{4} & \overline{3} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{4} & \overline{4} & \overline{3} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ + \\ \\ \end{matrix} \leadsto \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{3} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{4} & \overline{3} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ \overline{3} \mid \cdot \overline{4} \\ \\ \end{matrix} \leadsto \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}$$

Eine Basis von U ist demnach

$$\left\{ \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Schreibt man die beiden Vektoren, die W erzeugen, als Zeilen einer Matrix, so ist diese bereits in Zeilenstufenform. Insbesondere sind die beiden Vektoren linear unabhängig, das heißt

$$\left\{ \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{2} \\ \overline{1} \\ \overline{4} \\ \overline{3} \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von W.

Eine Basis von $U + W$ erhält man durch Anwenden des Gauß-Algorithmus auf die Matrix, die als Zeilen die Basen von U und W enthält:

$$\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{4} & \overline{3} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}.$$

Damit bildet die Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ eine Basis von $U + W$.

(b) Nach (a) ist $\dim U = 3$, $\dim W = 2$, $\dim(U + W) = 4$. Nach dem Dimensionssatz für Untervektorräume erhalten wir

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

Eine Basis von $U \cap W$ besteht also aus einem Vektor. Wegen

$$\begin{pmatrix} \overline{2} \\ \overline{1} \\ \overline{4} \\ \overline{3} \end{pmatrix} \in W, \quad \begin{pmatrix} \overline{2} \\ \overline{1} \\ \overline{4} \\ \overline{3} \end{pmatrix} = \overline{2} \cdot \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix} + \overline{4} \cdot \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{2} \end{pmatrix} \in U$$

ist eine Basis von $U \cap W$ gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} \overline{2} \\ \overline{1} \\ \overline{4} \\ \overline{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) Um eine Basis des Quotientenvektorraums $\mathbb{F}_5^4/U$ zu bestimmen, wählen wir zunächst eine Basis eines Komplements von U, also zum Beispiel $\{e_4\}$. Somit ist $\{e_4 + U\}$ eine Basis von $\mathbb{F}_5^4/U$.

Hinweis zur Korrektur: Wenn die Basisvektoren in Teil (a) gefunden wurden, aber nicht explitizit eine Basis hingeschrieben wurde (sondern z.B. das Erzeugnis der entsprechenden Vektoren) gibt es maximal 2 von den 3 möglichen Punkten.

Aufgabe 6 **(5+3 Punkte)**

Lösungsvorschlag

(a) Wir fixieren eine Matrix $B \in M_n(\mathbb{R})$ und betrachten die Abbildung

$$f_B \colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad A \mapsto \det(A \cdot B).$$

Wir zeigen, dass diese Abbildung n-linear und alternierend ist, und die Bedingung $f_B(I_n) = \det B$ erfüllt. Dann folgt die Behauptung aus der Eindeutigkeit der Determinantenfunktion.

Die letzte Bedingung $f_B(I_n) = \det B$ ist wegen $I_n \cdot B = B$ offensichtlich.

Wir zeigen nun, dass f_B n-linear ist. Da sich Linearkombinationen von Zeilen von A übersetzen in Linearkombinationen von Zeilen in $A \cdot B$, folgt die n-Linearität von f_B aus der n-Linearität von det.

Weiter ist f_B alternierend: Hat nämlich A zwei gleiche Zeilen, so gilt dies nach Definition des Matrixproduktes auch für die Matrix $A \cdot B$. Da die Determinante $\det\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ alternierend ist, erhalten wir $f_B(A) = \det(A \cdot B) = 0$.

(b) Laut Vorlesung gilt für die Einträge $\tilde{a}_{ij}$ der adjunkten Matrix $\widetilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ die Formel

$$\tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j} \det A[j,i],$$

wobei $A[j,i] \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ diejenige Matrix bezeichnet, die aus A durch Streichen der j-ten Zeile und der i-ten Spalte entsteht.

Hat A nur ganzzahlige Einträge, so gilt dies offensichtlich auch für $\widetilde{A}$. Weiter wissen wir nach einem Satz der Vorlesung, dass

$$\widetilde{A} \cdot A = (\det A) \cdot I_n$$

gilt. Somit ist die Inverse von A gegeben durch

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \widetilde{A}.$$

Mit der Voraussetzung $\det A \in \{+1, -1\}$ folgt insgesamt, dass A^{-1} nur ganzzahlige Einträge hat.