Isometrie

Spiegelung

Projektion, U-B

rar

L - A L I E N

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 5+a & 2a & 2c \\ 5 & 2a & c \end{pmatrix}$$

Im Hörsaal hört dich niemand schreien.

Durchfallquoten :

Mathematik: 83.9 %
Informatik: 76.0 %

Die Fachschaft Mathematik präsentiert eine Produktion des

Mathematischen Instituts II,

eine Aumann - Schober - Klausur.

GeTEXt von Klaus Spitzmüller, umgebrochen von Christian Borgsen

und verkauft für nur 70 Pfennige.

Aufgabe I.1
(i) $\Longrightarrow$ (ii)
Vor.: $M \subset G\mathbf{R}^{(n,n)} (= GL(n,\mathbf{R}) =$ Gruppe der invertierbaren reellen (n,n)-Matrizen)

(r) $\forall \mathcal{A} \in \mathbf{R}^{(n,n)} : \mathcal{A} \sim \mathcal{A}$, da $\mathcal{A} = \mathcal{E} \cdot \mathcal{A}$ und $\mathcal{E} \in M$.

(s) $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{R}^{(n,n)}$:
$\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \Longrightarrow \exists \mathcal{X} \in M : \mathcal{B} = \mathcal{X} \cdot \mathcal{A} \Longrightarrow \exists \mathcal{X}^{-1} \in M : \mathcal{A} = \mathcal{X}^{-1} \cdot \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{B} \sim \mathcal{A}$

(t) $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbf{R}^{(n,n)}$:
$\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \sim \mathcal{C} \Longrightarrow \exists \mathcal{X}, \mathcal{Y} \in M : \mathcal{B} = \mathcal{X} \cdot \mathcal{A} \wedge \mathcal{C} = \mathcal{Y} \cdot \mathcal{B} \Longrightarrow \exists \mathcal{X}, \mathcal{Y} \in M : \mathcal{C} = \mathcal{Y} \cdot \mathcal{X} \cdot \mathcal{A} \Longrightarrow$
$\exists \mathcal{Z} = \mathcal{Y} \cdot \mathcal{X} \in M : \mathcal{C} = \mathcal{Z} \cdot \mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A} \sim \mathcal{C}$

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

- Zunächst gilt wegen (r), daß $\mathcal{E} \in M$. Denn wenn es zu jedem $\mathcal{A} \in \mathbf{R}^{(n,n)}$ ein $\mathcal{X} \in M$ existiert, so daß $\mathcal{A} = \mathcal{X}\mathcal{A}$ gilt, so folgt speziell für die invertierbaren Matrizen $\mathcal{A}$ daraus $\mathcal{X} = \mathcal{E}$.
  Damit gilt $M \neq \emptyset$.
- Sei $\mathcal{X} \in M$ beliebig. Dann gilt:
  $\mathcal{X} = \mathcal{X} \cdot \mathcal{E} \Longrightarrow \mathcal{E} \sim \mathcal{X}$
  Wegen (s) folgt daraus $\mathcal{X} \sim \mathcal{E}$, d.h. $\exists \mathcal{Y} \in M : \mathcal{E} = \mathcal{Y} \cdot \mathcal{X}$
  Also ist $\mathcal{X}$ invertierbar und $\mathcal{X}^{-1} = \mathcal{Y} \in M$.
  Damit gilt $M \subset G\mathbf{R}^{(n,n)}$ und fr alle $\mathcal{X} \in M$ gilt $\mathcal{X}^{-1} \in M$.
- Seien $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in M$ beliebig. Dann gilt:
  $\mathcal{X} = \mathcal{X} \cdot \mathcal{E} \wedge \mathcal{Y} = \mathcal{Y}\mathcal{E} \Longrightarrow \mathcal{E} \sim \mathcal{X} \wedge \mathcal{E} \sim \mathcal{Y}$.
  Mit (s) folgt daraus $\mathcal{Y} \sim \mathcal{E} \wedge \mathcal{E} \sim \mathcal{X}$, woraus sich mit (t) $\mathcal{Y} \sim \mathcal{X}$ ergibt. Dies bedeutet:
  $\exists \mathcal{Z} \in M : \mathcal{X} = \mathcal{Z} \cdot \mathcal{Y} \Longrightarrow \exists \mathcal{Z} = \mathcal{X} \cdot \mathcal{Y}^{-1} \in M$.
  Das heißt, mit $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in M$ gilt stets $\mathcal{X} \cdot \mathcal{Y}^{-1} \in M$.

Mit diesen drei Überlegungen folgt, da M Untergruppe von $G\mathbf{R}^{(n,n)}$ ist.

Aufgabe I.2
(a) Die Summe $U_1 + U_2 + U_3$ ist genau dann direkt, wenn $U_1 \cap (U_2 + U_3) = \{o\}$, $U_2 \cap (U_2 + U_3) = \{o\}$ und $U_3 \cap (U_1 + U_2) = \{o\}$ gelten.

(b)
'$\Longrightarrow$'

$$\begin{aligned}
\dim(U_1 + U_2 + U_3) &= \dim(U_1 + (U_2 + U_3)) \\
&= \dim U_1 + \dim(U_2 + U_3) - \dim(U_1 \cap (U_2 + U_3)) \\
&\overset{(a)}{=} \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3 + \dim(U_2 \cap U_3) \\
&= \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3, .
\end{aligned}$$

da $U_2 \cap U_3 \subset U_2 \cap (U_1 + U_3) = \{o\}$ ist.

'$\Longleftarrow$'
z.z.: $U_i \cap (U_j + U_k) = \{o\}$ für paarweise verschiedene $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$.
Aus dem Dimensionssatz folgt

$$\begin{aligned}
\dim(U_i \cap (U_j + U_k)) &= \dim U_i + \dim(U_j + U_k) - \dim(U_i + U_j + U_k) \\
&= \dim U_i + \dim U_j + \dim U_k - \dim(U_i + U_j + U_k) - \dim(U_j \cap U_k) \\
&= -\dim(U_j \cap U_k)
\end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar $\dim(U_i \cap (U_j + U_k)) \leq 0$. Andererseits gilt $\dim(U_i \cap (U_j + U_k)) \geq 0$ (nach Def. der Dimension), so daß insgesamt $\dim(U_i \cap (U_j + U_k)) = 0$ gelten muß. Dies ist gleichbedeutend mit $U_i \cap (U_j + U_k) = \{o\}$.

Aufgabe I.3

(a)

Für eine Projektion Π gilt bekanntlich $V = \text{Kern}(\Pi) \ominus \text{Bild}(\Pi)$.
Wenn Φ ein Automorphismus von $\Pi(V)$ ist, hat man $\text{Bild}(\Psi) = \Psi(V) = \Phi(\Pi(V)) \dot{=} \Pi(V) = \text{Bild}(\Pi)$ und $\text{Kern}(\Psi) = \text{Kern}(\Phi \circ \Pi) = \text{Kern}(\Pi)$. Also gilt auch $V = \text{Kern}(\Psi) \ominus \text{Bild}(\Psi)$.

(b)

$'\Leftarrow'$

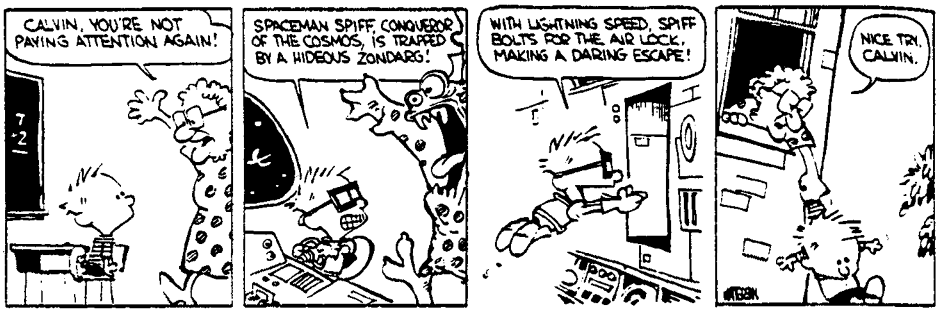
Für $\Phi = \text{id}$ ist $\Psi = \Pi$, daher ist Ψ eine Projektion.

$'\Rightarrow'$

Ist $\Phi \neq \text{id}$, so gibt es ein $\boldsymbol{y} = \Pi(\boldsymbol{x}) \in \Pi(V)$ mit $\Phi(\boldsymbol{y}) \neq \boldsymbol{y}$, etwa $\Phi(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ mit $\boldsymbol{o} \neq \boldsymbol{z} \in \Pi(V)$. Dann hat man

$$\begin{aligned}
\Psi(\boldsymbol{x}) &= \Phi(\Pi(\boldsymbol{x})) = \Phi(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \\
\Psi^2(\boldsymbol{x}) &= \Psi(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \Psi(\boldsymbol{y}) + \Psi(\boldsymbol{z}) = \Phi(\Pi(\boldsymbol{y})) + \Phi(\Pi(\boldsymbol{z})) = \Phi(\boldsymbol{y}) + \Phi(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} + \Phi(\boldsymbol{z}).
\end{aligned}$$

Weil Φ ein Automorphismus und $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{o}$ ist, gilt $\Phi(\boldsymbol{z}) \neq \boldsymbol{o}$. Für den Vektor $\boldsymbol{x}$ ist also $\Psi(\boldsymbol{x}) \neq \Psi^2(\boldsymbol{x})$. Damit ist $\Psi \neq \Psi^2$ und Ψ keine Projektion.



Aufgabe I.4

(a)

i) Bestimme W_β durch Lösen des angegebenen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{ccccccc}
2 & \beta & -\beta & \beta & -\beta & & \longleftarrow \\
-2 & 2 & -3 & -1 & \beta - 3 & \longleftarrow & | \\
2 & -1 & 2 & 1 & 2 - \beta & (+1) & (-1) \\
\hline
0 & \beta + 1 & -2 - \beta & \beta - 1 & -2 & & \longleftarrow \\
0 & 1 & -1 & 0 & -1 & (+1) & (-\beta - 1) \\
2 & -1 & 2 & 1 & 2 - \beta & \hookleftarrow & \\
\hline
0 & 0 & -1 & \beta - 1 & \beta - 1 & (+1) & (3.) \\
0 & 1 & -1 & 0 & -1 & | & (2.) \\
2 & 0 & 1 & 1 & 1 - \beta & \hookleftarrow & (1.) \\
\hline
2 & 0 & 0 & \beta & 0 & & \\
0 & 1 & -1 & 0 & -1 & & \\
0 & 0 & -1 & \beta - 1 & \beta - 1 & &
\end{array}$$

Also gilt

$$\begin{array}{rcccc}
x_3 = & (\beta - 1) & x_4 + & (\beta - 1) & x_5 \\
x_2 = x_3 + x_5 = & (\beta - 1) & x_4 + & \beta & x_5 \\
x_1 = & -\frac{1}{2}\beta & x_4 & &
\end{array}$$

und wir erhalten

$$W_\beta = \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\beta \\ \beta - 1 \\ \beta - 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \beta - 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\beta \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \beta - 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} \beta \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \beta - 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

ii) Bestimme $\dim(U_\beta + W_\beta)$mit den angegebenen Spalten- und Zeilenoperationen:

$$\dim(U_\beta+W_\beta) = \text{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\beta & 1 & 0 \\ \beta+1 & 1 & -2 & \beta+1 & 1 \\ \beta & 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & \beta & \beta-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\text{1.Spalte} - \text{4.Spalte} \\ \text{2.Spalte} - \text{5.Spalte}\end{pmatrix}$$

$$= \text{Rang}\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \beta+1 & 1 \\ \beta+2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & \beta-1 & \beta-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{cc} -\beta & (-2) \\ & \\ & \\ & \\ & \end{array} \qquad (\text{3.Spalte} - \text{2.Spalte})$$

$$= \text{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\beta & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta-1 & -1 \\ \beta+2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & \beta-1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{cc} (-1) & (3.) \\ (+1) & (4.) \\ & (5.) \\ & (1.) \\ & (2.) \end{array}$$

$$= \text{Rang}\underbrace{\begin{pmatrix} \beta+2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & \beta-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\beta & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta-1 \end{pmatrix}}_{=:\mathcal{A}_\beta}$$

1. Fall $\beta = -2$

$$\dim(U_{-2}+W_{-2}) = \text{Rang}\begin{pmatrix} 0 & * & * & * & * \\ 0 & -3 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 3 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

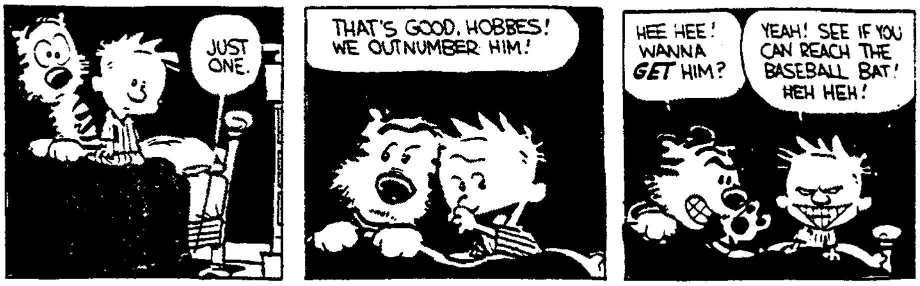
2. Fall $\beta = -1$

$$\dim(U_{-1}+W_{-1}) = \text{Rang}\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & -2 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

3. Fall $\beta = 1$

$$\dim(U_1+W_1) = \text{Rang}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3$$

4. Fall $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-2,-1,1\}$
Für $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-2,-1,1\}$ ist $\det(\mathcal{A}_\beta) = (\beta+2)(\beta-1)(\beta-1)(\beta+1) \neq 0$ und folglich $\dim(U_\beta + W_\beta) = \text{Rang}(\mathcal{A}_\beta) = 5$.



(b) Betrachte zuerst U_1 und W_1:

$$U_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Dabei wurden im ersten Schritt der zweite Vektor vom ersten sowie das doppelte vom zweiten Vektor vom dritten subtrahiert.

$$W_1 = \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

(i)

$$U_1 + W_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

(ii) Es ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_1 \cap W_1$. Außerdem ist

$$\dim(U_1 \cap W_1) = \dim U_1 + \dim W_1 - \dim(U_1 + W_1) = 2 + 2 - 3 = 1\,,$$

also $U_1 \cap W_1 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$.

(iii) Nach (i) und (ii) ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (U_1 \cap W_1)\,, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + (U_1 \cap W_1) \right\}$$

eine Basis von $(U_1 + W_1)/(U_1 \cap W_1)$.

Aufgabe I.5

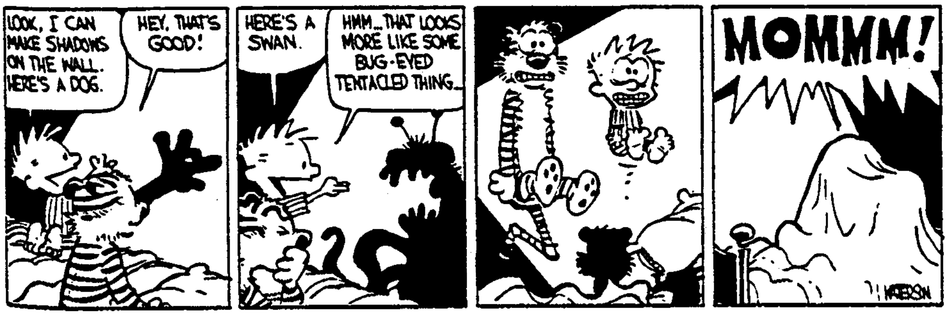
Wegen $\Phi(U_j) = U_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$ ist die Abbildungsmatrix $\mathcal{A}_i$ von $\Phi|_{U_i}$ bzgl. der Basis $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_i\}$ eine obere Dreiecksmatrix, und das charakteristische Polynom ist

$$\det(\Phi|_{U_i} - \lambda\, \mathrm{id}|_{U_i}) = (-1)^i \prod_{j=1}^{i} (\lambda - \alpha_{jj}).$$

Daraus folgt:

- $\Phi|_{U_i}$ ist diagonalisierbar und hat die i verschiedenen Eigenwerte $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{ii}$ und
- $\Phi|_{U_{i-1}}$ ist diagonalisierbar und hat die $i-1$ verschiedenen Eigenwerte $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{i-1,i-1}$.

Daher gibt es einen Eigenvektor $\boldsymbol{x}_i \in U_i$ (zum Eigenwert α_{ii}), der notwendigerweise nicht in U_{i-1} liegt, weil sonst $\Phi|_{U_{i-1}}$ ebenfalls den Eigenwert α_{ii} hätte.



Aufgabe I.6

a) $\mathcal{A}_\beta$ ($\mathcal{A}_\gamma$) ist eine unter (obere) Dreiecksmatrix, die Determinante ist also das Produkt der Diagonalelemente:

$$\det \mathcal{A}_\beta = (\alpha - \beta)^n \quad , \quad \det \mathcal{A}_\gamma = (\alpha - \gamma)^n.$$

b) Durch Subtraktion der ersten Zeile von allen anderen Zeilen ergibt sich

$$\det \mathcal{A}_x = \begin{vmatrix} \alpha - x & \beta - x & \cdots & \cdots & \cdots & \beta - x \\ \gamma - x & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \beta - x \\ \gamma - x & \cdots & \cdots & \cdots & \gamma - x & \alpha - x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha - x & \beta - x & \cdots & \cdots & \cdots & \beta - x \\ \gamma - \alpha & \alpha - \beta & 0 & & & 0 \\ \vdots & \gamma - \beta & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \gamma - \alpha & \gamma - \beta & \cdots & \cdots & \gamma - \beta & \alpha - \beta \end{vmatrix}.$$

Durch Entwicklung nach der ersten Zeile bzw. mit der Leibnizformel folgt die Behauptung.

c) Nach b) gilt $\det \mathcal{A}_x = ax + b$ mit Konstanten $a, b \in \mathbf{R}$.
Nach a) folgt dann

$$\det \mathcal{A}_\beta = a\beta + b = (\alpha - \beta)^n \quad \text{und} \quad \det \mathcal{A}_\gamma = a\gamma + b = (\alpha - \gamma)^n.$$

Dann ergibt sich

$$\det \mathcal{A}_0 = b = \frac{\gamma \det \mathcal{A}_\beta - \beta \det \mathcal{A}_\gamma}{\gamma - \beta} = \frac{\gamma(\alpha - \beta)^n - \beta(\alpha - \gamma)^n)}{\gamma - \beta}.$$

Wie besteht man eine LA - Klausur ?

Mathematiker und Mathematikerinnen:
Teil I und Teil II bestehen aus je 6 Aufgaben. Bestanden hat, wer in beiden Teilen zusammen mindestens 20 Punkte erzielt. Dabei wird in jedem Teil die Aufgabe, in der man die meisten Punkte erzielt hat, doppelt gewertet.
Informatiker und Informatikerinnen:
Teil I besteht aus 6 Aufgaben, Teil II jedoch nur aus den Aufgaben 1-4. Bestanden hat, wer in beiden Teilen zusammen mindestens 17 Punkte erzielt. Dabei wird in jeden Teil die Aufgabe, in der man die meisten Punkte erzielt hat, doppelt gewertet.

Aufgabe I.1 (4 Punkte)

Es sei M eine Teilmenge der Menge $\mathbf{R}^{(n,n)}$ aller reellen $n \times n$-Matrizen ($n \in I\!N$). Auf $\mathbf{R}^{(n,n)}$ sei eine Relation $\sim$ erklärt durch:

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \iff \exists \mathcal{X} \in M : \mathcal{B} = \mathcal{X} \cdot \mathcal{A}.$$

Zeigen Sie, daß die beiden folgenden Aussagen (i) und (ii) zueinander äquivalent sind:

(i) M ist eine Untergruppe der Gruppe der invertierbaren Matrizen aus $\mathbf{R}^{(n,n)}$.

(ii) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbf{R}^{(n,n)}$.

Aufgabe I.2 (4 Punkte)

Gegeben seien drei Untervektorräume U_1, U_2, U_3 eines Vektorraums V.

(a) Geben Sie eine Definition dafür, daß die Summe $U_1 + U_2 + U_3$ direkt ist.

(b) Zeigen Sie:
Sind U_1, U_2, U_3 endlichdimensional, so ist die Summe $U_1 + U_2 + U_3$ genau dann direkt, wenn

$$\dim(U_1 + U_2 + U_3) = \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3$$

gilt.

Aufgabe I.3 (4 Punkte)

Es seien V ein Vektorraum, $\Pi : V \to V$ eine Projektion (d.h. ein Endomorphismus mit $\Pi^2 = \Pi$) und $\Phi : \Pi(V) \to \Pi(V)$ ein Isomorphismus.
Zeigen Sie, daß für den durch $\Psi(\boldsymbol{x}) = \Phi(\Pi(\boldsymbol{x}))$, $\boldsymbol{x} \in V$, definierten Endomorphismus Ψ von V gilt:

(a) $V = \operatorname{Kern}\Psi \oplus \operatorname{Bild}\Psi$,

(b) Ψ ist Projektion $\iff \Phi = \mathrm{id}$.

Aufgabe I.4 (4 Punkte)

Im reellen Vektorraum $\mathbf{R}^5$ seien für beliebiges $\beta \in \mathbf{R}$ der Untervektorraum U_β durch

$$U_\beta = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta+1 \\ 1 \\ -2 \\ \beta+1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

und der Untervektorraum W_β durch das homogene LGS

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & \beta x_2 & - & 3x_3 & + & \beta x_4 & - & \beta x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & + & (\beta-3)x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & (2-\beta)x_5 & = & 0 \end{array}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie $\dim(U_\beta + W_\beta)$ in Abhängigkeit von β .

(b) Geben Sie eine Basis des Faktorraums $\quad (U_1 + W_1) \big/ (U_1 \cap W_1) \quad$ an.

Aufgabe I.5 (4 Punkte)

Es seien V ein n-dimensionaler Vektorraum, $B = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$ eine Basis von V und $U_i = [\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_i]$, $i = 1, \ldots, n$, sowie $U_0 = \{\boldsymbol{o}\}$. Weiter sei Φ ein Endomorphismus von V mit $\Phi(U_i) = U_i$ für $i = 1, \ldots, n$.
Für die Abbildungsmatrix $\mathcal{A} = (\alpha_{ij})$ von Φ bezüglich B gelte $\alpha_{ii} \neq \alpha_{kk}$ für $i \neq k$.
Zeigen Sie:
Für $i = 1, \ldots, n$ gibt es Eigenvektoren $\boldsymbol{x}_i$ von Φ mit $\boldsymbol{x}_i \in U_i \setminus U_{i-1}$.

Aufgabe I.6 (4 Punkte)

Es seien $n \in I\!N$ und $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ mit $\beta \neq \gamma$ gegeben. Für jedes $x \in \mathbf{R}$ wird die Matrix $\mathcal{A}_x \in \mathbf{R}^{(n,n)}$ durch

$$\mathcal{A}_x = \begin{pmatrix} \alpha - x & \beta - x & \cdots & \cdots & \cdots & \beta - x \\ \gamma - x & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \beta - x \\ \gamma - x & \cdots & \cdots & \cdots & \gamma - x & \alpha - x \end{pmatrix}$$

definiert.

(a) Bestimmen Sie $\det \mathcal{A}_\beta$ und $\det \mathcal{A}_\gamma$.

(b) Zeigen Sie, daß $\det \mathcal{A}_x$ ein Polynom vom Grad ≤ 1 in x ist.
(Hinweis: Sie müssen dafür die Koeffizienten des Polynoms nicht explizit berechnen.)

(c) Berechnen Sie $\det \mathcal{A}_0$ unter Verwendung von (a) und (b).

Aufgabe II.1 (4 Punkte)
Es seien V ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum und Φ ein Endomorphismus von V. Die Nullabbildung von V wird mit Ω bezeichnet.
Zeigen Sie:
Es existieren

- ein diagonalisierbarer Endomorphismus Φ_1 von V und
- ein Endomorphismus Φ_2 von V, zu dem es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\Phi_2^k = \Omega$ gilt,

mit den folgenden beiden Eigenschaften:

(i) $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$,
(ii) $\Phi_1 \circ \Phi_2 = \Phi_2 \circ \Phi_1$.

(Hinweis: Verwenden Sie die Jordansche Normalform.)

Aufgabe II.2 (4 Punkte)

Es sei Π die Orthogonalprojektion des euklidischen Standardvektorraums $\mathbb{R}^4$ auf den Untervektorraum

$$U = [\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}].$$

Berechnen Sie für den Vektor

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

den Cosinus des Winkels zwischen $\boldsymbol{x}$ und $\Pi(\boldsymbol{x})$.

Aufgabe II.3 (4 Punkte)

Es sei Φ eine Isometrie des euklidischen Standardvektorraumes $\mathbb{R}^3$ mit $\det \Phi = -1$.

(a) Zeigen Sie:

(i) Φ besitzt den Eigenwert -1.
(ii) Ist $\boldsymbol{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -1, so gilt $(\Phi(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}) \perp \boldsymbol{v}$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Für Φ gelte zusätzlich

$$\Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 \\ \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+12 \\ 6\sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die (euklidische) Normalform der Isometrie Φ.

Aufgabe II.4 (4 Punkte)

Gegeben sei eine affine Abbildung $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ mit den folgenden drei Eigenschaften:

(i) $\varphi \neq \mathrm{id}$,

(ii) $\varphi^2 = \mathrm{id}$,

(iii) für alle Geraden $g \subset \mathbf{R}^n$ gilt $\varphi(g) \parallel g$.

Zeigen Sie, daß φ eine Punktspiegelung ist.

Die beiden letzten Aufgaben waren nur in der Klausur für Mathematikstudierende.

Aufgabe II.5 (4 Punkte)

Es seien V, W unitäre Vektorräume und $\Phi : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung, zu der die Adjungierte $\Phi^* : W \longrightarrow V$ existiert.
Zeigen Sie:

(a) Ist Φ surjektiv, so ist Φ^* injektiv.

(b) Ist Φ injektiv und W endlichdimensional, so ist V endlichdimensional und Φ^* surjektiv.

Aufgabe II.6 (4 Punkte)

Im affinen Raum $\mathbf{R}^3$ sei ein hyperbolisches Paraboloid $\mathcal{Q}$ durch die Gleichung

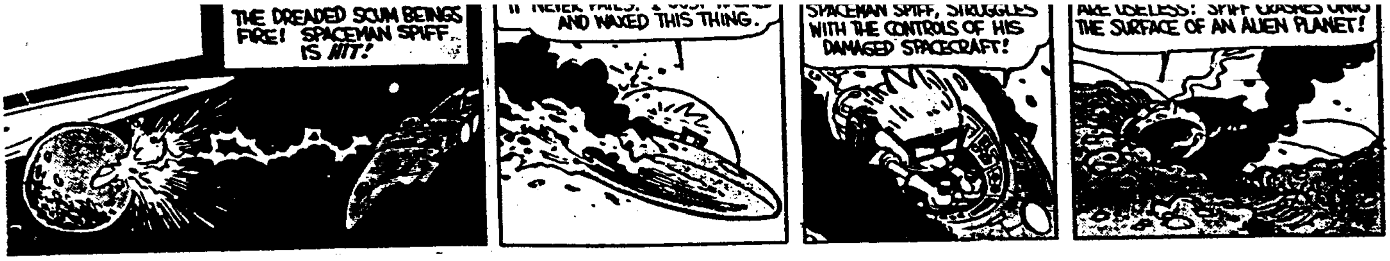
$$x_1^2 - x_2^2 = 2x_3$$

gegeben.
Zeigen Sie:

(a) Durch jeden Punkt $A \in \mathcal{Q}$ laufen genau zwei Geraden g_A und $\overline{g}_A$, die auf $\mathcal{Q}$ liegen.

(b) Die Geraden aus (a) lassen sich so in zwei Klassen $\mathcal{K} = \{g_A \mid A \in \mathcal{Q}\}$ und $\overline{\mathcal{K}} = \{\overline{g}_A \mid A \in \mathcal{Q}\}$ einteilen, daß gilt:

- zwei Geraden aus verschiedenen Klassen schneiden sich in genau einem Punkt, und
- zwei verschiedene Geraden einer Klasse sind windschief.



Aufgabe II.1
Zum Endomorphismus Φ des n-dimensionalen Vektorraums V existiert eine (Jordan-)Basis $B = \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\}$, so daß die Abbildungsmatrix $\mathcal{A}$ von Φ bzgl. B die Jordan-Normalform

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \epsilon_1 & \lambda_2 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \epsilon_2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \epsilon_{n-2} & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \epsilon_{n-1} & \lambda_n \end{pmatrix}$$

annimmt. Dabei sind λ_i, $i = 1, \ldots, n$ die Eigenwerte von Φ und es gilt $\epsilon_i \in \{0,1\}$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Speziell gilt $\epsilon_i = 0$, wenn $\lambda_i \neq \lambda_{i+1}$ ist.
Definiert man $\epsilon_n := 0$ und $\boldsymbol{b}_{n+1} := \boldsymbol{o}$, so lassen sich die Bilder der Basisvektoren einheitlich wie folgt angeben

$$\Phi(\boldsymbol{b}_i) = \lambda_i \boldsymbol{b}_i + \epsilon_i \boldsymbol{b}_{i+1} \quad , \quad i = 1, \ldots, n.$$

Wir definieren die Abbildungen Φ_1 und Φ_2 für die Basisvektoren von B durch

$$\Phi_1(\boldsymbol{b}_i) := \lambda_i \boldsymbol{b}_i \quad \text{und} \quad \Phi_2(\boldsymbol{b}_i) := \epsilon_i \boldsymbol{b}_{i+1} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Durch lineare Fortsetzung sind damit Φ_1 und Φ_2 auf V erklärt.
Offensichtlich ist Φ_1 diagonalisierbar, denn bzgl. B hat die Abbildungsmatrix von Φ_1 Diagonalgestalt.
Wegen $\epsilon_n = 0$ bzw. $\boldsymbol{b}_{n+1} = \boldsymbol{o}$ gilt für Φ_2 und $\boldsymbol{b}_i$, $i = 1, \ldots, n$

$$\Phi_2^{n+1-i}(\boldsymbol{b}_i) = (\prod_{j=i}^{n} \epsilon_j) \boldsymbol{b}_{n+1} = \boldsymbol{o},$$

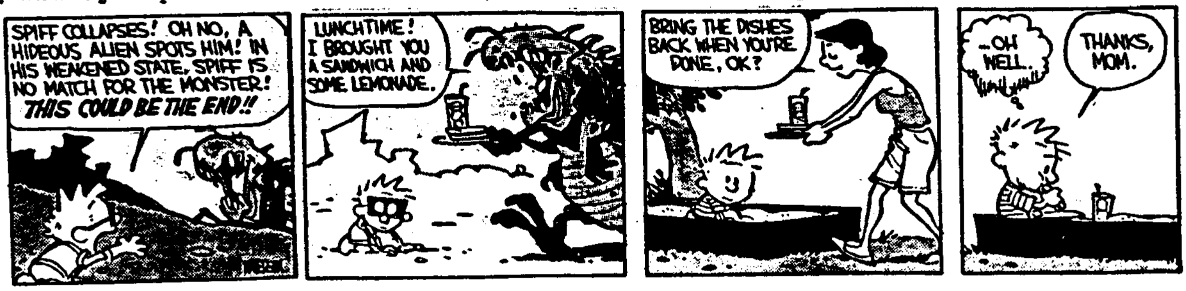
so daß $\Phi_2^n = \Omega$ gilt.
Offensichtlich gilt für Φ_1 und Φ_2 und für $\boldsymbol{b}_i \in B$ nach Konstruktion

$$\Phi(\boldsymbol{b}_i) = \lambda_i \boldsymbol{b}_i + \epsilon_i \boldsymbol{b}_{i+1} = \Phi_1(\boldsymbol{b}_i) + \Phi_2(\boldsymbol{b}_i).$$

Damit stimmen Φ und $\Phi_1 + \Phi_2$ für alle Vektoren aus V überein: es gilt also die Eigenschaft (i). Die Eigenschaft (ii) rechnen wir ebenfalls auf der Basis B nach. Für $\boldsymbol{b}_i \in B$, $i = 1, \ldots, n$ gilt:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\Phi_2(\boldsymbol{b}_i)) &= \Phi_1(\epsilon_i \boldsymbol{b}_{i+1}) = \epsilon_i \lambda_{i+1} \boldsymbol{b}_{i+1} \\ \Phi_2(\Phi_1(\boldsymbol{b}_i)) &= \Phi_2(\lambda_i \boldsymbol{b}_i) = \lambda_i \epsilon_i \boldsymbol{b}_{i+1} \end{aligned}$$

Für $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ stimmen die beiden Ausdrücke überein. Für $\lambda_i \neq \lambda_{i+1}$ gilt nach obiger Bemerkung $\epsilon_i = 0$, also sind auch diesem Fall die beiden Bilder gleich. Damit stimmen die beiden Abbildungen $\Phi_1 \circ \Phi_2$ und $\Phi_2 \circ \Phi_1$ auf der Basis B überein, so daß sie letztendlich gleich sind.



Aufgabe II.2
Wir bestimmen zunächst eine ONB $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3\}$ von U. Dazu wenden wir das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf

$$\boldsymbol{x}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 := \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

an.

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_1 := \boldsymbol{x}_1, \quad \boldsymbol{y}_1 := \frac{1}{||\tilde{\boldsymbol{y}}_1||}\tilde{\boldsymbol{y}}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_2 := \boldsymbol{x}_2 - \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_1 \rangle \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_2 - 3\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_2 := \frac{1}{||\tilde{\boldsymbol{y}}_2||}\tilde{\boldsymbol{y}}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_3 := \boldsymbol{x}_3 - \langle \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{y}_2 \rangle \boldsymbol{y}_2 - \langle \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{y}_1 \rangle \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_3 - 4\boldsymbol{y}_2 - 2\boldsymbol{y}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_3 := \frac{1}{||\tilde{\boldsymbol{y}}_3||}\tilde{\boldsymbol{y}}_3 = \tilde{\boldsymbol{y}}_3$$

Da $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3\}$ ONB von U ist, gilt $\Pi(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{3} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_i \rangle \boldsymbol{y}_i = -\boldsymbol{y}_1 + 3\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$

Nun gilt

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{x}|| &= \sqrt{1+1+9+1} = 2\sqrt{3} \\ ||\Pi(\boldsymbol{x})|| &= \frac{1}{3}\sqrt{9+25+49+16} = \sqrt{11} \\ \langle \boldsymbol{x}, \Pi(\boldsymbol{x}) \rangle &= \frac{1}{3}(3+5+21+16) = 11 \end{aligned}$$

Wir erhalten für den Winkel ω zwischen $\boldsymbol{x}$ und $\Pi(\boldsymbol{x})$:

$$\cos\omega = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \Pi(\boldsymbol{x}) \rangle}{||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\Pi(\boldsymbol{x})||} = \frac{11}{2\sqrt{3 \cdot 11}} = \sqrt{\frac{11}{12}}.$$

Aufgabe II.3
(a) (i) Die Isometrie Φ hat bezüglich einer ONB des $\mathbb{R}^3$ die (euklidische) Normalform

$$A_\Phi = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

mit $\beta \in \{1, -1\}$ und $\omega \in [0, \pi]$.
Nach Vor. ist $-1 = \det\Phi = \det A_\Phi = \beta(\cos^2\omega + \sin^2\omega) = \beta \implies \beta = -1$ ist Eigenwert von Φ.
(ii) Seien $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ beliebig und $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ mit $\Phi(\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{v}$. Dann gilt

$$\langle \Phi(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} | \boldsymbol{v} \rangle = \langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} \rangle \overset{\Phi\text{Isom.}}{=} \langle \Phi(\boldsymbol{x}) | \boldsymbol{v} \rangle + \langle \Phi(\boldsymbol{x}) | \underbrace{\Phi(\boldsymbol{v})}_{-\boldsymbol{v}} \rangle = \langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v} \rangle - \langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v} \rangle = 0,$$

also $(\Phi(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}) \perp \boldsymbol{v}$.

(b) Wir bestimmen zunächst einen Eigenvektor $\boldsymbol{v}$ von Φ zum Eigenwert -1 (der nach (a) (i) existiert). Wegen (a) (ii) gilt

$$\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{y}_1 := \Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 \\ \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+3 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2}+3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{y}_2 := \Phi(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}) + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+12 \\ 6\sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+8 \\ 6\sqrt{2}+10 \\ \sqrt{2}+8 \end{pmatrix}$$

Also ist $\boldsymbol{v} \in [\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2]^\perp$.
Elementare Umformungen von

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}+3 & \sqrt{2} & \sqrt{2}+3 \\ \sqrt{2}+8 & 6\sqrt{2}+10 & \sqrt{2}+8 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1) & & (2.) \\ \hookleftarrow & :(-5) & (1.) \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}+2 & 1 \\ \sqrt{2}+3 & \sqrt{2}+2 & \sqrt{2}+3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -(\sqrt{2}+3) & \\ \hookleftarrow & :(-4\sqrt{2}-8) \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}+2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow \\ -(\sqrt{2}+2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ergeben: $\boldsymbol{v} := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist normierter Eigenvektor zum Eigenwert -1.

Nun bestimmen wir den Drehwinkel ω, indem wir $\Phi(\boldsymbol{w})$ für einen geeigneten Vektor $\boldsymbol{w}$ aus $[\boldsymbol{v}]^\perp$ (Drehebene) berechnen:

$$\boldsymbol{w} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \sqrt{2}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = 0$, also $\boldsymbol{w} \in [\boldsymbol{v}]^\perp$ und

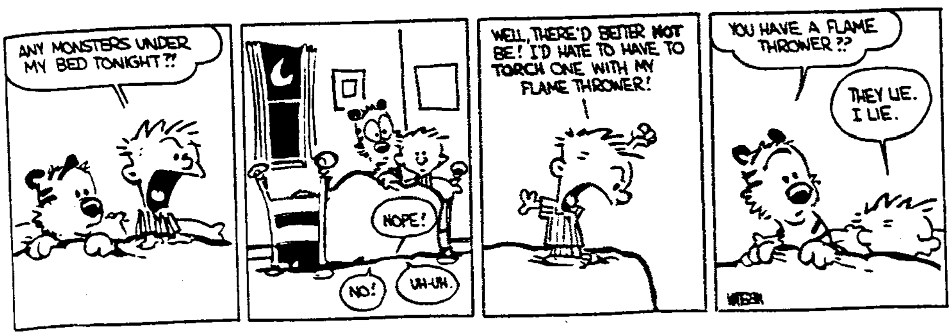
$$\Phi(\boldsymbol{w}) = \Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \sqrt{2}\boldsymbol{v}) = \Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) + \sqrt{2}\underbrace{\Phi(\boldsymbol{v})}_{=-\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 \\ \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} - \sqrt{2}\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $||\Phi(\boldsymbol{w})|| = ||\boldsymbol{w}|| = \sqrt{12}$ gilt

$$\cos\omega = \frac{\langle \boldsymbol{w}, \Phi(\boldsymbol{w}) \rangle}{||\boldsymbol{w}|| \cdot ||\Phi(\boldsymbol{w})||} = \frac{1}{12} 6\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad (\Longrightarrow \omega = \frac{\pi}{4})$$

und $\sin\omega = \sqrt{1-\cos^2\omega} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Die Normalform von Φ hat damit die Gestalt

$$A_\Phi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$



Aufgabe II.4
Wir identifizieren im folgenden Punkte mit ihren Ortsvektoren.
φ hat die Form $\boldsymbol{x} \mapsto \varphi(\boldsymbol{x}) = \Phi(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{a}\,,\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, mit einer linearen Abbildung $\Phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ und $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$. Aus $\varphi^2 = \mathrm{id}$ folgt $\Phi^2 = \mathrm{id}$ und $\Phi(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$, insbesondere ist Φ also bijektiv.
Sei nun $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n\,,\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$, beliebig. Für die Gerade $g : \lambda\boldsymbol{x}\,,\ \lambda \in \mathbf{R}$ gilt nach (iii) $\varphi(g) \parallel g$, also sind $\Phi(\boldsymbol{x})$ und $\boldsymbol{x}$ linear abhängig. Weil $\varphi(g)$ eine Gerade mit Richtungsvektor $\Phi(\boldsymbol{x})$ und φ bijektiv ist, ergibt sich:

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} \quad \text{mit} \quad c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Für $n = 1$ ist $\{\boldsymbol{x}\}$ eine Basis des $\mathbf{R}^1$. Für einen Vektor $\boldsymbol{y} = \rho\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^1$ gilt dann $\Phi(\boldsymbol{y}) = \Phi(\rho\boldsymbol{x}) = \rho c(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} = c(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}$, so daß $\Phi = c(\boldsymbol{x})\mathrm{id}$ gilt.
Eine entsprechende Aussage läßt sich auch im Fall $n > 1$ finden. Seien dazu $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ linear unabhängig. Dann folgt

$$\begin{aligned} \Phi(\boldsymbol{x}) &= c(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} \\ \Phi(\boldsymbol{y}) &= c(\boldsymbol{y})\boldsymbol{y} \\ \Phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), \end{aligned}$$

und somit $c(\boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{y}) = c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$. Also gilt für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$: $\Phi(\boldsymbol{x}) = c \cdot \boldsymbol{x}$.
Aus $\Phi^2 = \mathrm{id}$ folgt $c^2 = 1$. Wäre $c = 1$, so wäre $\Phi = \mathrm{id}$ und $2\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$, also $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$, Damit wäre $\varphi = \mathrm{id}$, im Widerspruch zur Voraussetzung (i).
Somit ist $c = -1$, und für φ gilt

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}\,,\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n,$$

d.h. φ ist Punktspiegelung an $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

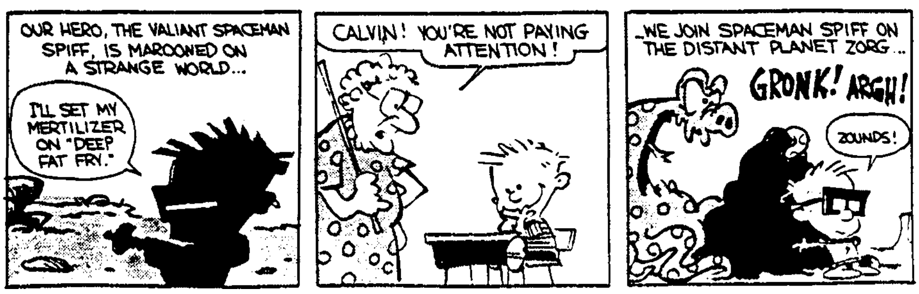
Aufgabe II.5
Vorbemerkung: Für einen unitären Vektorraum W ist die lineare Abbildung

$$W \to W^* = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(W, \mathbf{C})\,,\ \boldsymbol{w} \mapsto (\boldsymbol{w}' \mapsto \langle \boldsymbol{w}', \boldsymbol{w} \rangle),$$

stets injektiv (nach Definition des Skalarprodukts) und , falls $\dim W < \infty$, auch surjektiv (wegen $\dim W = \dim W^*$ nach Vorlesung).

(a) Sei $\boldsymbol{w} \in W$ mit $\Phi^*(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{o}$.
z.z. $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$.
Es genügt dazu die folgende Aussage zu zeigen: $\forall \boldsymbol{w}' \in W : \langle \boldsymbol{w}', \boldsymbol{w} \rangle = 0$ (nach Vorbem.)
Da Φ nach Voraussetzung surjektiv existiert $\boldsymbol{v}' \in V$ mit $\Phi(\boldsymbol{v}') = \boldsymbol{w}$. Damit folgt

$$\langle \boldsymbol{w}', \boldsymbol{w} \rangle = \langle \Phi(\boldsymbol{v}'), \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{v}', \Phi^*(\boldsymbol{w}) \rangle = \langle \boldsymbol{v}', \boldsymbol{o} \rangle = 0$$



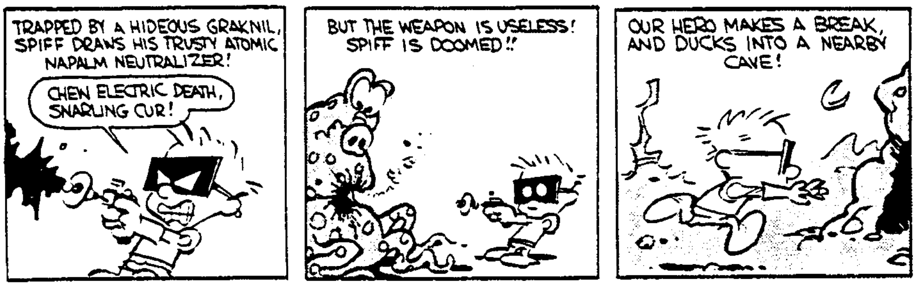
(b) Da Φ injektiv ist $\dim V \leq \dim W < \infty$, also V endlichdimensional.
z.z.: Jedes $\boldsymbol{v} \in V$ hat ein Urbild unter Φ^*, d.h. $\forall \boldsymbol{v} \in V \, \exists \boldsymbol{w} \in W$ mit $\Phi^*(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}$.

Sei $\boldsymbol{v} \in V$.
Wähle Basis $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_m\}$ von V. Da Φ injektiv sind dann $\Phi(\boldsymbol{v}_1), \ldots, \Phi(\boldsymbol{v}_m)$ linear unabhängig in W und können nach dem Basisergänzungssatz zu einer Basis $\{\Phi(\boldsymbol{v}_1), \ldots, \Phi(\boldsymbol{v}_m), \boldsymbol{w}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$ von W ergänzt werden.
Sei die Linearform $g : W \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\begin{aligned} g(\Phi(\boldsymbol{v}_i)) &:= \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v} \rangle \quad & i = 1, \ldots, m \\ g(\boldsymbol{w}_i) &:= 0 & i = m+1, \ldots, n \end{aligned}$$

Damit gilt für alle $\boldsymbol{v}' \in V : g(\Phi(\boldsymbol{v}')) = \langle \boldsymbol{v}', \boldsymbol{v} \rangle$.
Auerdem existiert nach Vorbemerkung ein $\boldsymbol{w} \in W$ so daß für alle $\boldsymbol{w}' \in W$ gilt $g(\boldsymbol{w}') = \langle \boldsymbol{w}', \boldsymbol{w} \rangle$.
Behauptung: $\Phi^*(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}$
Beweis: Nach Vorbemerkung genügt es zu zeigen: $\forall \boldsymbol{v}' \in V : \langle \boldsymbol{v}', \Phi^*(\boldsymbol{w}) \rangle = \langle \boldsymbol{v}', \boldsymbol{v} \rangle$

$$\langle \boldsymbol{v}', \Phi^*(\boldsymbol{w}) \rangle = \langle \Phi(\boldsymbol{v}'), \boldsymbol{w} \rangle \overset{\text{Def.}\,\boldsymbol{w}}{=} g(\Phi(\boldsymbol{v}')) \overset{\text{Def.}\,g}{=} \langle \boldsymbol{v}', \boldsymbol{v} \rangle$$



Aufgabe II.6
(a) Es sei $A(a_1, a_2, a_3)$ ein Punkt auf Q. Eine Gerade g durch A mit der Parameterdarstellung

$$g : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{v} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

und $\boldsymbol{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{o}$ liegt genau dann auf Q, wenn für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 = \lambda^2(v_1^2 - v_2^2) + 2\lambda(a_1 v_1 + a_2 v_2 - v_3) + a_1^2 - a_2^2 - 2a_3 = 0$$

gilt. Wegen $A \in Q$ führt dies auf die Bedingungen

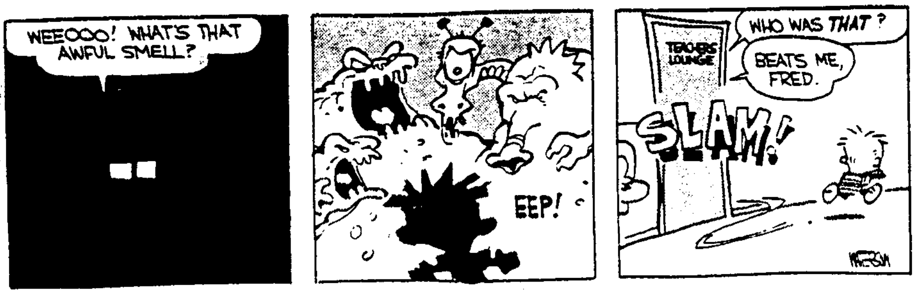
$$v_1^2 - v_2^2 = 0 \quad \text{und} \quad a_1 v_1 - a_2 v_2 = v_3.$$

Es gibt also durch $A \in Q$ genau 2 Geraden

(1) $$g_A : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{v}_A; \qquad \boldsymbol{v}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a_1 - a_2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

(2) $$\overline{g}_A : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \mu \overline{\boldsymbol{v}}_A; \qquad \overline{\boldsymbol{v}}_A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R},$$

die auf Q liegen.



(b) Wir bilden die Klassen

$$\mathcal{K} = \{g_A | A \in \mathcal{Q}\} \quad \text{und} \quad \overline{\mathcal{K}} = \{\overline{g}_A | A \in \mathcal{Q}\}.$$

(b1) Zwei Geraden $g_A, \overline{g}_B$ aus verschiedenen Klassen schneiden sich genau dann, wenn es gemäß (1),(2) Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ gibt mit

$$\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{b} + \mu \boldsymbol{v}_B.$$

Das sich hieraus ergebende LGS für λ, μ hat die erweiterte Matrix

$$\left(\mathcal{A} \vdots \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \vdots & b_1 - a_1 \\ 1 & 1 & \vdots & b_2 - a_2 \\ a_1 - a_2 & -b_1 - b_2 & \vdots & b_3 - a_3 \end{pmatrix},$$

wobei $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ wie üblich Ortsvektor des Punktes B ist.

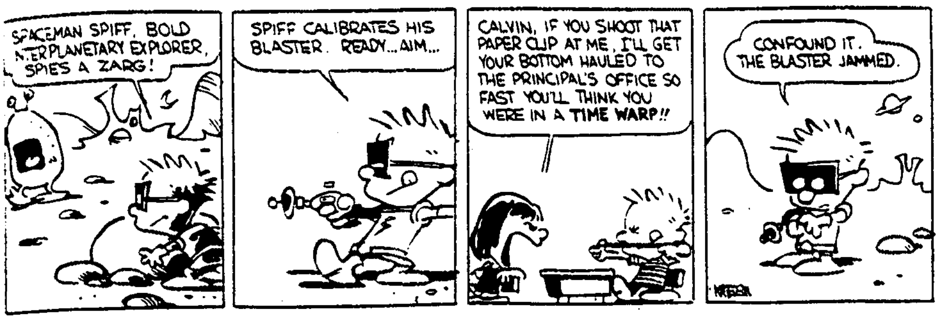
Es ist Rang$\mathcal{A} = 2$ und $\det\left(\mathcal{A} \vdots \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\right) = 0$, wie man durch Entwickeln nach der 3. Spalte sofort feststellt. Also ist das LGS eindeutig lösbar, d.h. g_A und $\overline{g}_B$ haben genau einen Punkt gemeinsam.
(b2) Zwei verschiedene Geraden einer Klasse sind windschief:
Sie können sich zunächst nicht schneiden, denn sonst würde ein Punkt $S \in \mathcal{Q}$ existieren, durch den zwei Geraden desselben Typs laufen würden, entgegen der Aussage in (a).
Sie können auch nicht parallel sein: Angenommen es gäbe $g_A, g_B \in \mathcal{K}$ mit $g_A \parallel g_B$. Dann wäre nach (1) mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 = \frac{1}{2}(b_1^2 - b_2^2) \end{pmatrix}$ des Punktes B

$$a_1 - a_2 = b_1 - b_2$$

und für $\lambda = b_1 - a_1 = b_2 - a_2$ folgt

$$\boldsymbol{a} + (b_1 - a_1)\boldsymbol{v}_A = \begin{pmatrix} a_1 + 1 \cdot (b_1 - a_1) \\ a_2 + 1 \cdot (b_2 - a_2) \\ a_3 + \underbrace{(b_1 - a_1)(a_1 - a_2)}_{=(\frac{1}{2}(b_1 - a_1) + \frac{1}{2}(b_2 - a_2))(a_1 - a_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \frac{1}{2}(b_1 - b_2)(b_2 + b_1) \end{pmatrix} = \boldsymbol{b},$$

also $B \in g_A$ und damit $g_A = g_B$, im Widerspruch zur Annahme.
Analog gilt, daß zwei verschiedene Geraden aus $\overline{\mathcal{K}}$ nicht parallel sind.



Aufgabe	I-1	I-2	I-3	I-4	I-5	I-6	II-1	II-2	II-3	II-4	II-5	II-6
Bearbeitungen	61	103	78	93	23	94	55	88	87	41	24	5
häufigste Pkt.	1	0	0	0	0	1	0	0,5	0	0	0	0
wie oft	16	28	28	29	23	50	35	20	26	29	15	5
durchschn.Pkt.	1,5	1,1	0,9	1,4	0,0	1,4	0,7	1,6	0,8	0,3	0,3	0,0