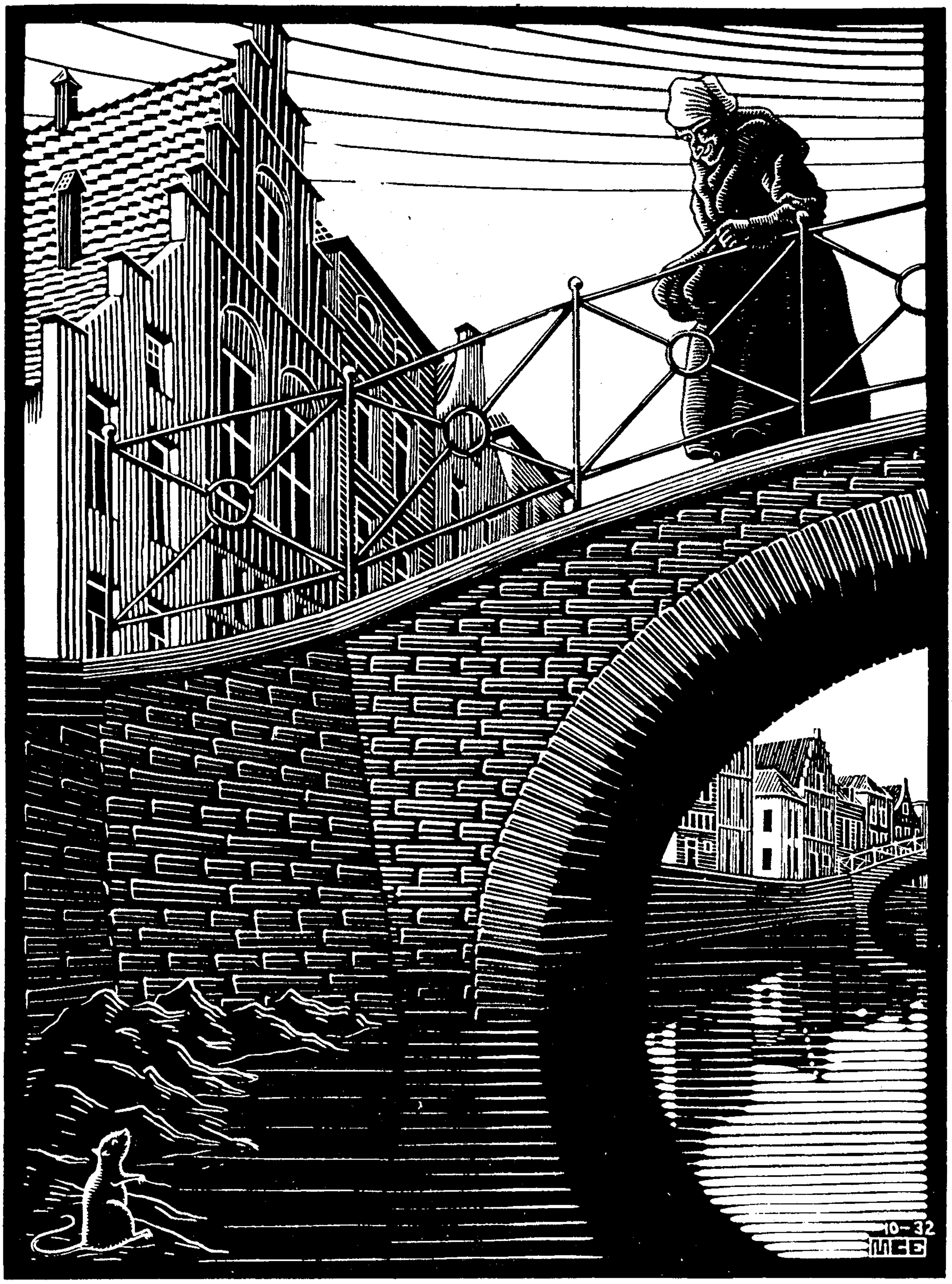
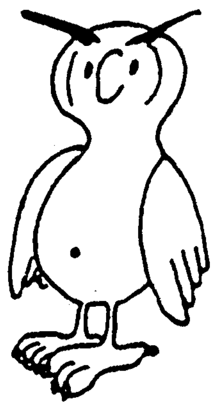


LA H'96



Zusammenstellung : Jan Litsch

hrsg.: FS math

Preis: 70 Pfg

Aufgabe I.1

a) z.B. $M_1 := \mathbb{R}$, $x \; R_1 \; y \;:\Leftrightarrow\; |x-y| \leq 1$

oder Parallelität bei affinen Unterräumen

b) z.B. $M_2 := \mathbb{N}$, $x \; R_2 \; y \;:\Leftrightarrow\;$ x ist Teiler von y

oder $M_2 := \mathbb{Z}$, $x \; R_2 \; y \;:\Leftrightarrow\; x \leq y$

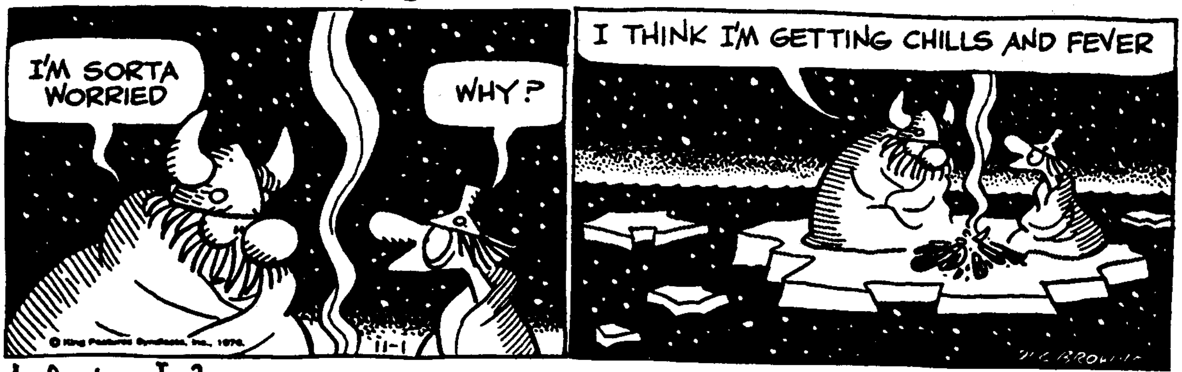
c) z.B. $M_3 := \mathbb{N}$, $x \; R_3 \; y \;:\Leftrightarrow\;$ x und y sind beide gerade

oder $M_3 := \mathbb{R}$, $x \; R_3 \; y \;:\Leftrightarrow\; x = y \neq 0$

oder $M_3 := \mathbb{Z}$, $x \; R_3 \; y \;:\Leftrightarrow\; x \neq 0$ und $y \neq 0$

oder $M_3 \neq \emptyset$ beliebig , R_3 leere Relation

oder $M_3 := \{0, 1\}$, $x \; R_3 \; y \;:\Leftrightarrow\; x = y = 0$



Aufgabe I.2

a) "$\subseteq$" $x \in U_1 \cap (U_2 + U_3) \;\Rightarrow\; x \in U_1 \;\wedge\; x \in U_2 + U_3$

$\Rightarrow\; x \in U_1 \;\wedge\; \exists\, x_2 \in U_2, x_3 \in U_3 : x = x_2 + x_3$

$x \in U_1 ,\; x_3 \in U_3 \subseteq U_1 \;\Rightarrow\; x_2 = x - x_3 \in U_1$

$\curvearrowright\; x = x_2 + x_3 \in (U_1 \cap U_2) + U_3$

"$\supseteq$" $x \in (U_1 \cap U_2) + U_3 . \;\Rightarrow\; \exists\, x_1 \in U_1 \cap U_2 , x_2 \in U_3 : x = x_1 + x_2$

$x_1 \in U_1 \cap U_2 \subseteq U_1 ,\; x_2 \in U_3 \subseteq U_1 \;\Rightarrow\; x = x_1 + x_2 \in U_1$

$x_1 \in U_1 \cap U_2 \subseteq U_2 ,\; x_2 \in U_3 \;\Rightarrow\; x = x_1 + x_2 \in U_2 + U_3$

$\curvearrowright\; x \in U_1 \cap (U_2 + U_3)$

b) Gegenbeispiel : $V := \mathbb{R}^2$, $U_1 := [\binom{1}{0}]$, $U_2 := U_3 := [\binom{0}{1}]$.

Dann ist : $U_1 \cap (U_2 + U_3) = \{\binom{0}{0}\} \neq [\binom{0}{1}] = (U_1 \cap U_2) + U_3$

$$U := \left[\begin{pmatrix}1\\3\\1\\2\\2\\12\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\5\\0\\-1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\-2\\2\\-3\\12\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\-14\\2\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\5\\0\\-1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-3\\0\\-5\\0\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\-14\\2\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\8\\8\\0\\4\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-3\\0\\-5\\0\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\-14\\2\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-3\\0\\-5\\0\end{pmatrix}\right]$$

Damit erhält man $U^\perp$ als Lösungsmenge des homogenen LGS mit der Matrix

$$\begin{pmatrix}1&0&-14&2&5&0\\0&1&-3&0&-5&0\\0&0&2&0&1&1\end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} x_1 &= 14x_3 - 2x_4 - 5x_5 \\ x_2 &= 3x_3 + 5x_5 \\ x_6 &= -2x_3 - x_5 \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \quad U^\perp = \left[\begin{pmatrix}14\\3\\1\\0\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\5\\0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right] \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix}14&3&1&0&0&-2\\-2&0&0&1&0&0\\-5&5&0&0&1&-1\end{pmatrix} \text{ ist LGS für } U.$$

Einsetzen von $(1,1,1,2,2,3)^T$ liefert die rechte Seite eines LGS für L:

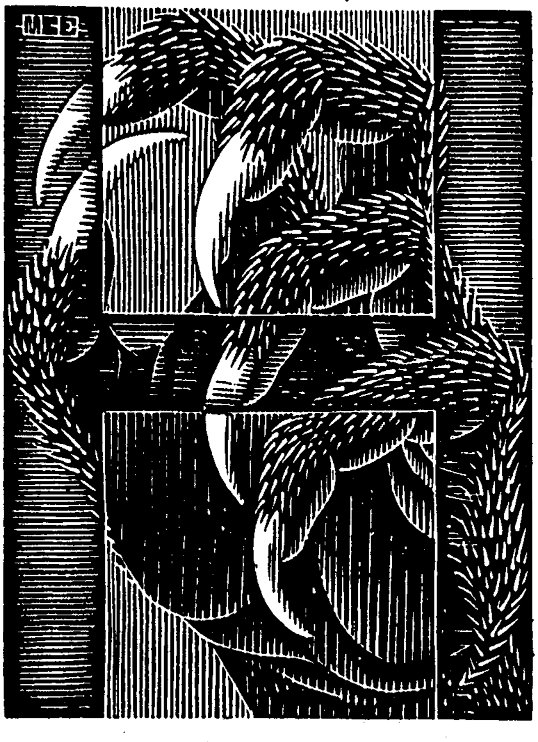
$$\left(\begin{array}{cccccc|c}14&3&1&0&0&-2&12\\-2&0&0&1&0&0&0\\-5&5&0&0&1&-1&-1\end{array}\right) \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} 14x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_6 &= 12 \\ -2x_1 + x_4 &= 0 \\ -5x_1 + 5x_2 + x_5 - x_6 &= -1 \end{aligned}$$

(Dieses LGS ist selbstverständlich <u>nicht</u> eindeutig bestimmt!)

<u>Alternativ:</u> Sämtliche Vektoren aus L sind genau dann Lösungen einer linearen Gleichung $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 + \alpha_6 x_6 = \beta$, wenn

$$\begin{pmatrix}1&1&1&2&2&3&-1\\1&3&1&2&2&12&0\\0&1&5&0&-1&4&0\\0&0&2&0&1&1&0\\1&4&-2&2&-3&12&0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\alpha_5\\\alpha_6\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{(homogenes LGS für } \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\beta)$$

Indem man dieses (z.B. mit dem GAUSS-Algorithmus) löst, findet man einen dreidimensionalen Lösungsraum, jede Basis dieses Lösungsraums stellt ein LGS dar, dessen Lösung gerade L ist.



Aufgabe 1.4

a) • U° Untervektorraum : UVR-Kriterium:

- $U^\circ \neq \emptyset$, denn die Nullabbildung liegt offensichtlich in U°.
- Seien $\phi, \psi \in U^\circ$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann gilt für alle $u \in U$:
  $(\alpha\phi + \beta\psi)(u) = \alpha\phi(u) + \beta\psi(u) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$, also $\alpha\phi + \beta\psi \in U^\circ$.

• Repräsentantenunabhängigkeit:

Sei $x + U = z + U \Leftrightarrow z \in x + U \Leftrightarrow z - x \in U$. Dann gilt:

$\overline{\phi}(z+U) = \phi(z) = \phi(z) - 0 = \phi(z) - \phi(z-x) = \phi(z-(z-x)) = \phi(x) = \overline{\phi}(x+U)$.

• Linearität: Seien $x, y \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann gilt:

$\overline{\phi}(\alpha(x+U) + \beta(y+U)) = \overline{\phi}((\alpha x + \beta y) + U) = \phi(\alpha x + \beta y)$

$= \alpha\phi(x) + \beta\phi(y) = \alpha\overline{\phi}(x+U) + \beta\overline{\phi}(y+U)$.

b) F ist linear: Seien $\phi, \psi \in U^\circ$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann gilt:

$F(\alpha\phi + \beta\psi) = \overline{\alpha\phi + \beta\psi} = \alpha\overline{\phi} + \beta\overline{\psi} = \alpha F(\phi) + \beta F(\psi)$, denn

$\forall x \in V$: $\overline{\alpha\phi + \beta\psi}(x+U) = (\alpha\phi + \beta\psi)(x) = \alpha\phi(x) + \beta\psi(x)$

$= \alpha\overline{\phi}(x+U) + \beta\overline{\psi}(x+U) = (\alpha\overline{\phi} + \beta\overline{\psi})(x+U)$.

F ist injektiv, denn $F(\phi) = F(\psi) \Leftrightarrow \overline{\phi} = \overline{\psi}$

$\Leftrightarrow \forall x + U \in V/U$: $\overline{\phi}(x+U) = \overline{\psi}(x+U) \Leftrightarrow \forall x \in V$: $\phi(x) = \psi(x) \Leftrightarrow \phi = \psi$.

F ist surjektiv, denn sei: $\overline{\phi} \in (V/U)^*$. Dann ist $\overline{\phi} = F(\phi)$ mit

$\phi : \begin{cases} V \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \overline{\phi}(x+U) \end{cases}$ noch zu zeigen: $\phi \in U^\circ$.

• ϕ ist wohldefiniert: $y \in x + U \Rightarrow y + U = x + U \Rightarrow \overline{\phi}(y+U) = \overline{\phi}(x+U)$.

• ϕ ist linear: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in V$: $\phi(\alpha x + \beta y) = \overline{\phi}((\alpha x + \beta y) + U)$

$= \overline{\phi}(\alpha(x+U) + \beta(y+U)) = \alpha\overline{\phi}(x+U) + \beta\overline{\phi}(y+U) = \alpha\phi(x) + \beta\phi(y)$.

• $\phi \in U^\circ$: $\forall x \in U$: $\phi(x) = \overline{\phi}(x+U) = \overline{\phi}(0+U) = 0$.

c) $\dim U^\circ \overset{(b)}{=} \dim (V/U)^* = \dim (V/U) = \dim V - \dim U$

$\Rightarrow \dim U^\circ + \dim U = \dim V$.

L3

Aufgabe 1.5

a) $\Rightarrow$ $\forall x \in E_{c_i}: \ \phi(\psi(x)) = (\phi \circ \psi)(x) = (\psi \circ \phi)(x) = \psi(\phi(x)) = \psi(c_i x) = c_i \, \psi(x)$

das heißt: $\forall x \in E_{c_i}: \ \psi(x) \in E_{c_i}$, also: $\psi(E_{c_i}) \subseteq E_{c_i}$

$\Leftarrow$ ϕ diagonalisierbar $\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{c_i}$, d.h. $\forall x \in V: \exists x_i \in E_{c_i}: \ x = \sum_{i=1}^{k} x_i$

Damit: $(\psi \circ \phi)(x) = \psi(\phi(x)) = \psi(\phi(\sum_{i=1}^{k} x_i)) = \psi(\sum_{i=1}^{k} c_i x_i) = \sum_{i=1}^{k} c_i \, \psi(x_i)$

$$\overset{\text{Vor}}{=} \sum_{i=1}^{k} \phi(\psi(x_i)) = \phi(\psi(\sum_{i=1}^{k} x_i)) = (\phi \circ \psi)(x) \qquad \text{qed}$$

b) Weil ϕ diagonalisierbar ist, erhält man, indem man nacheinander je eine Basis jedes Eigenraums E_{c_i}, $i = 1, \dots, k$, aufschreibt, eine Basis von V. Nach a) gilt dann:

$\psi \in W \iff \psi$ besitzt bezüglich dieser Basis eine Darstellungsmatrix der Gestalt

$$\begin{array}{cccc} \overbrace{\quad}^{\dim E_{c_1}} & \overbrace{\quad}^{\dim E_{c_2}} \cdots & \overbrace{\quad}^{\dim E_{c_k}} & \\ \left(\begin{array}{cccc} \boxed{*} & & & 0 \\ & \boxed{*} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{*} \end{array} \right) & & & \begin{array}{l} \} \dim E_{c_1} \\ \} \dim E_{c_2} \\ \vdots \\ \} \dim E_{c_k} \end{array} \end{array}$$

W ist isomorph zum Vektorraum aller solchen Matrizen, und dessen Dimension ist offensichtlich $\sum_{i=1}^{k} (\dim E_{c_i})^2$. Also: $\dim W = \sum_{i=1}^{k} (\dim E_{c_i})^2$.

Aufgabe I.6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -2 & 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -3 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & n-2 & 0 \\ & & & & -(n-2) & 1 & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & -(n-1) & 1 \end{pmatrix}$$

j-te Spalte von A: $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ j-1 \\ 1 \\ -j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Man sieht: Die Spaltensumme ist (mit Ausnahme der letzten Spalte) stets Null.

Das nutzt man aus: Durch Addition der Zeilen 2 bis n zur ersten Zeile erhält man:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n \\ -1 & 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -3 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -(n-1) & 1 \end{pmatrix} \overset{1.\text{Z.}}{=} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -3 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & n-2 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -(n-1) \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot n \cdot (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! = (-1)^{2n} \cdot n! = \underline{\underline{n!}}$$

Alternativ: Durch Addition der Zeilen 1 bis $n-1$ auf die letzte Zeile findet man die Rekursionsformel $\det A^{(n)} = n \cdot \det A^{(n-1)}$, woraus man mittels vollständiger Induktion leicht dasselbe Resultat erhält.

Aufgabe II.1

a) $\frac{1}{2}$ einziger Eigenwert $\rightsquigarrow$ charakteristisches Polynom $p(x) = (x-\frac{1}{2})^5$

Eigenraum dreidimensional $\rightsquigarrow$ drei Jordankästchen zum Eigenwert $\frac{1}{2}$

$(\phi^2 - \frac{1}{2}\phi)^2 = 0 \Rightarrow$ Minimalpolynom ist Teiler von $(x^2 - \frac{1}{2}x)^2 = x^2(x-\frac{1}{2})^2$,

also $(x-\frac{1}{2})^2$ oder $x - \frac{1}{2}$, denn 0 ist kein Eigenwert von ϕ.

Annahme: $x - \frac{1}{2}$ ist Minimalpolynom $\Rightarrow$ fünf Jordankästchen $\lightning$

Also: $(x-\frac{1}{2})^2$ ist Minimalpolynom, d.h. größtes Jordankästchen hat Größe 2.

Damit: $\mathrm{JNF} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & & & \\ 1 & \frac{1}{2} & & & \\ & & \frac{1}{2} & 0 & \\ & & 1 & \frac{1}{2} & \\ & & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

b) Annahme: ϕ nicht injektiv $\Rightarrow \exists x: \phi(x) = 0 = 0 \cdot x \Rightarrow 0$ ist Eigenwert von ϕ $\lightning$

Also ϕ injektiv, und als Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums somit bijektiv.

Geben Sie Mengen M_1, M_2, M_3 und Relationen R_1 auf M_1, R_2 auf M_2 und R_3 auf M_3 so an, daß gilt:

a) R_1 ist reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv.

b) R_2 ist reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch.

c) R_3 ist symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv.

Aufgabe I.2 (4 Punkte)

Es seien V ein Vektorraum und U_1, U_2, U_3 Untervektorräume von V mit $U_3 \subset U_1$. Zeigen Sie:

a) $U_1 \cap (U_2 + U_3) = (U_1 \cap U_2) + U_3$.

b) Ohne die Voraussetzung $U_3 \subset U_1$ gilt die Aussage in a) nicht.

Aufgabe I.3 (4 Punkte)

Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an mit der Lösungsmenge

$$L = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \\ 12 \end{bmatrix} \right] \subset \mathbb{R}^6$$

Aufgabe I.4 (4 Punkte)

Es seien V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und U ein Untervektorraum von V. Zeigen Sie:

a) $U^\circ := \{\Phi \in V^* \mid \Phi(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$ ist ein Untervektorraum des Dualraumes V^* von V, und für alle $\Phi \in U^\circ$ ist die Zuordnung

$$\overline{\Phi} : V/U \longrightarrow \mathbb{K}, \ \mathfrak{x} + U \longmapsto \Phi(\mathfrak{x})$$

repräsentantenunabhängig, und definiert eine lineare Abbildung $\overline{\Phi}$.

b) Die Abbildung $F : U^\circ \longrightarrow (V/U)^*$, $\Phi \longmapsto \overline{\Phi}$ ist ein Vektorraumisomorphismus.

c) $\dim U^\circ + \dim U = \dim V$.

Aufgabe I.5 (4 Punkte)

Es seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum und Φ ein diagonalisierbarer Endomorphismus von V, der genau k Eigenwerte $c_1,\dots,c_k$ besitzt. Die zugehörigen Eigenräume seien $E_{c_1},\dots,E_{c_k}$. Zeigen Sie:

a) Für alle $\Psi \in \mathrm{End}(V)$ gilt:

$$\Psi \circ \Phi = \Phi \circ \Psi \iff \Psi(E_{c_i}) \subset E_{c_i}, \ i = 1,\dots,k.$$

b) Für den Vektorraum $W = \{\Psi \in \mathrm{End}(V) \mid \Psi \circ \Phi = \Phi \circ \Psi\}$ gilt

$$\dim W = (\dim E_{c_1})^2 + \cdots + (\dim E_{c_k})^2.$$

A1

Aufgabe I.6 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Determinante der (n,n)–Matrix $A = (\!(a_{ij})\!)$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ -j & \text{für } i=j+1 \\ j-1 & \text{für } i=j-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zur Statistik dieser Klausur:

Teilnehmer insgesamt: 202

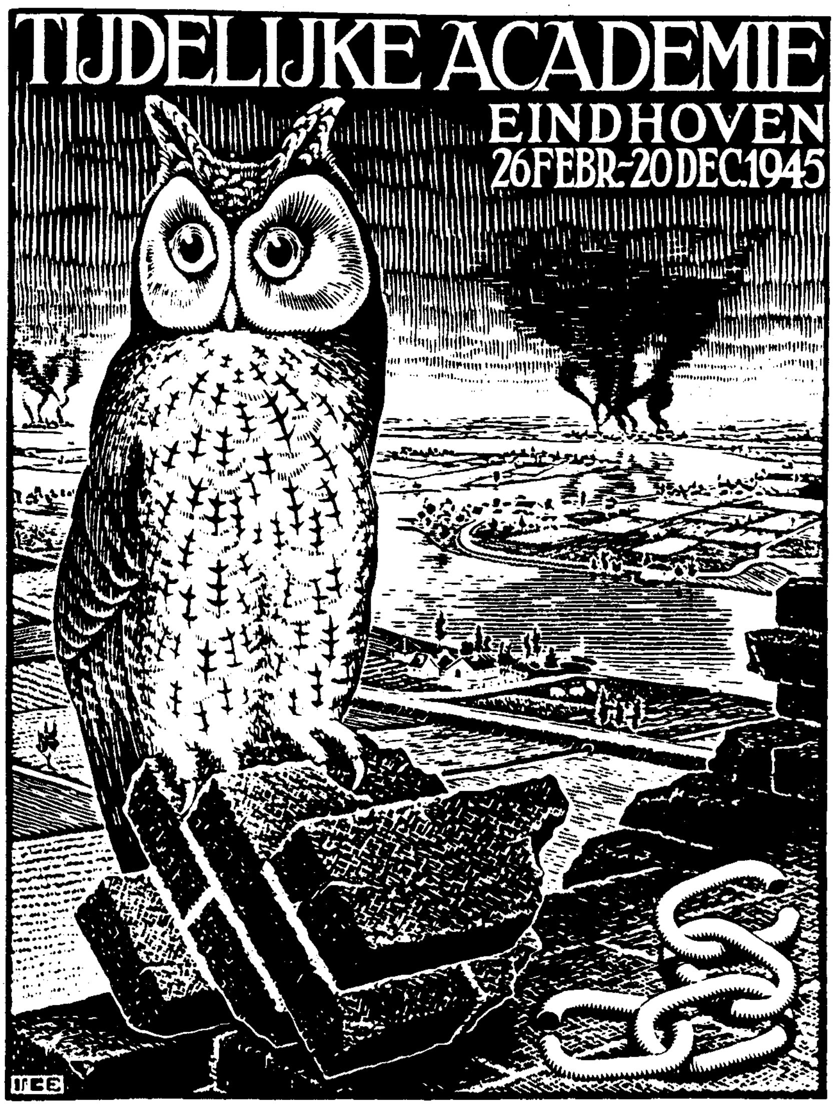
(davon 83 Mathematikoklausur, 119 Informatikerklausur)

Durchfallquote insgesamt: 47 %

(inf: 51 %, dipl-math: 23%, tema: 33%, wima: 38%, Lehramt: 58%)

Aufgabe	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	II.5	II.6
häufigste Punktzahl	1	0	0	2.5	0	4	0	4	0.5	0	0.5	0
zweithäufigste Punktzahl	2	1	4	3	1.5	0	0.5	3	1	0.5	1	2.5
dritthäufigste Punktzahl	0	4	0.5	0	2.5	1	1	0	0	1	0	3.5

Warum gehört eigentlich von neun möglichen Bewertungen die Null immer zu den drei häufigsten?



Es seien V ein fünfdimensionaler komplexer Vektorraum und Φ ein Endomorphismus von V mit den folgenden Eigenschaften:

Φ besitzt den einzigen Eigenwert $\frac{1}{2}$, die Dimension des zugehörigen Eigenraumes ist drei, und es gilt $(\Phi^2 - \frac{1}{2}\Phi)^2 = O$ (Nullabbildung).

a) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von Φ.

b) Zeigen Sie, daß Φ bijektiv ist, und bestimmen Sie die Jordansche Normalform von Φ^{-1}.

c) Bestimmen Sie zu einer gegebenen Jordanbasis $(\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_5)$ für Φ eine Jordanbasis $(\mathfrak{y}_1,\dots,\mathfrak{y}_5)$ für Φ^{-1}. Dabei sind die Vektoren $\mathfrak{y}_1,\dots,\mathfrak{y}_5$ als Linearkombinationen von $\mathfrak{x}_1,\dots,\mathfrak{x}_5$ darzustellen.

Aufgabe II.2 (4 Punkte)

Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^5$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt) seien zwei Ebenen E_1 und E_2 gegeben durch

$$E_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\4\\1\\0\end{bmatrix} + [\begin{bmatrix}2\\0\\3\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix}], \quad E_2 = \begin{bmatrix}2\\-3\\0\\0\\4\end{bmatrix} + [\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\2\\1\end{bmatrix}].$$

Bestimmen Sie den Abstand $d(E_1,E_2)$ der beiden Ebenen sowie $\mathfrak{x}_1 \in E_1$, $\mathfrak{x}_2 \in E_2$ mit $d(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_2) = d(E_1,E_2)$.

Aufgabe II.3 (4 Punkte)

Es sei A eine symmetrische, positiv definite, reelle (n,n)-Matrix.

a) Zeigen Sie: A und A^2 haben die gleiche Anzahl von Eigenwerten. Jeder Eigenvektor von A ist Eigenvektor von A^2 und umgekehrt.

b) Geben Sie eine symmetrische Matrix an, für die beide Aussagen in a) falsch sind.

Aufgabe II.4 (4 Punkte)

Im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei eine eigentliche Drehung $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben mit

$$\Phi(\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \Phi(\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2\\1\\7\end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Drehachse $[\mathfrak{a}]$, den Drehwinkel ω, die (euklidische) Normalform $\tilde{A}$ von Φ und eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$, bezüglich der Φ die Normalform $\tilde{A}$ besitzt.

Hier endete die Klausur für die Informatiker.

Aufgabe II.5 (4 Punkte)

Es seien V ein unitärer, endlichdimensionaler Vektorraum und Φ ein Endomorphismus von V, für dessen adjungierte Abbildung Φ^* gilt: $\Phi^* = 2\,\Phi^2 - \Phi$.

Zeigen Sie, daß Φ eine Orthogonalprojektion ist.

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß Φ normal ist.)

Aufgabe II.6 (4 Punkte)

Im reellen affinen Raum $\mathbb{R}^3$ seien die Quadriken

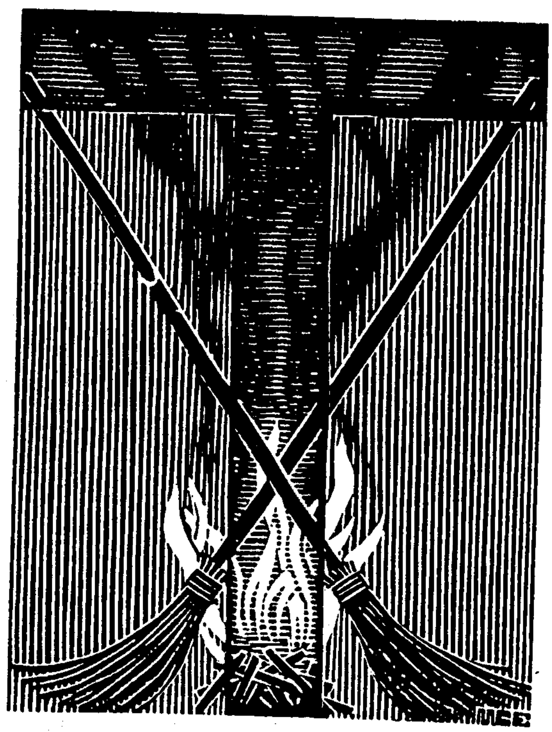
$$Q:\ x_1^2 + x_2^2 - 2\,x_3 = 0$$

$$Q_a:\ (a+3)\,x_1^2 + 5\,x_2^2 + x_3^2 - 4\,x_1 x_2 + 2\,x_1 x_3 - 4\,x_2 x_3 - 2\,x_1 - 4\,x_2 = 4$$

mit $a \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Menge M aller $a \in \mathbb{R}$, für die Q und Q_a affin äquivalent sind.

b) Geben Sie für ein $a \in M$ eine Affinität $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ an, die Q in Q_a überführt.



c) + Rest von b) $\phi(e_2) = \frac{1}{2} e_2 \Rightarrow e_2 = 2\,\phi(e_2) = \phi(2e_2) \Rightarrow \underline{\phi^{-1}(e_2) = 2e_2}$

$\phi(e_1) = \frac{1}{2} e_1 + e_2 \Rightarrow e_1 = 2\,\phi(e_1) - 2e_2 = \phi(2e_1) - 4\,\phi(e_2) = \phi(2e_1 - 4e_2)$

$\Rightarrow \underline{\phi^{-1}(e_1) = 2e_1 - 4e_2}$

analog: $\phi^{-1}(e_3) = 2e_3$, $\phi^{-1}(e_4) = 2e_4 - 4e_3$, $\phi^{-1}(e_5) = 2e_5$.

Nun setzt man: $y_1 := e_1$, $y_2 := -4e_2$, $y_3 := e_3$, $y_4 := -4e_4$, $y_5 := e_5$.

Damit: $\underline{\phi^{-1}(y_1) = 2y_1 + y_2}$,

$\underline{\phi^{-1}(y_2) =} \phi^{-1}(-4e_2) = -4\,\phi^{-1}(e_2) = -4\cdot 2\,e_2 = \underline{2y_2}$.

analog: $\phi^{-1}(y_3) = 2y_3 + y_4$, $\phi^{-1}(y_4) = 2y_4$, $\phi^{-1}(y_5) = 2y_5$.

Das heißt: $\underline{\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\} = \{e_1, -4e_2, e_3, -4e_4, e_5\}}$ ist eine Jordanbasis von ϕ^{-1}, und die Jordannormalform von ϕ^{-1} lautet

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & \\ 0 & & \boxed{2} \end{pmatrix}.$$

Alternativ: Betrachte inverse Matrix der Jordannormalform von ϕ, und transformiere diese in Jordannormalform.

2. Alternative zu c) + Rest von b): Für $\lambda \neq 0$ gilt:

$\phi(x) = \lambda x \Leftrightarrow x = \phi^{-1}(\lambda x) = \lambda\,\phi^{-1}(x) \Leftrightarrow \phi^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda} x$,

das heißt: λ ist Eigenwert von $\phi \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}$ ist Eigenwert von ϕ^{-1},

und: Eigenraum von ϕ zum EW λ = Eigenraum von ϕ^{-1} zum EW $\frac{1}{\lambda}$.

Also ist 2 einziger Eigenwert von ϕ^{-1} und der zugehörige Eigenraum ist dreidimensional.

Das Minimalpolynom von ϕ ist $(x - \frac{1}{2})^2$, also: $(\phi - \frac{1}{2}\,id)^2 = 0$

$\Rightarrow (\phi^{-1})^2 \circ (\phi - \frac{1}{2}\,id)^2 = (id - \frac{1}{2}\,\phi^{-1})^2 = 0 \Leftrightarrow (\phi^{-1} - 2\,id)^2 = 0$.

Daraus erhält man die JNF von ϕ^{-1} (selbe Matrix wie oben).

$[e_2, e_4, e_5]$ = Eigenraum von ϕ zum EW $\frac{1}{2}$ = Eigenraum von ϕ^{-1} zum EW 2.

Dies führt durch Rechnung wie oben zur Jordanbasis.

Aufgabe II.2

Für die gesuchten Lotfußpunkte $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ gilt

$$x_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\4\\1\\0\end{pmatrix} + a\underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\3\\0\\0\end{pmatrix}}_{=:y_1} + b\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{=:y_2} = \begin{pmatrix}1+2a\\2+b\\4+3a\\1\\b\end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\\4\end{pmatrix} + c\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}}_{=:y_3} + d\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\\1\end{pmatrix}}_{=:y_4} = \begin{pmatrix}2\\-3\\c\\-c+2d\\4+d\end{pmatrix}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

$x_1 - x_2 = \begin{pmatrix}-1+2a\\5+b\\4+3a-c\\1+c-2d\\b-4-d\end{pmatrix}$ ist Richtungsvektor des gemeinsamen Lotes von E_1 und E_2.

Daher gilt für die Richtungsvektoren y_1, y_2, y_3, y_4 von E_1 und E_2: $x_1 - x_2 \perp y_i$, $i=1,2,3,4$.

Somit erhält man 4 Gleichungen $\langle x_1 - x_2, y_i\rangle = 0$, $i=1,2,3,4$, für 4 Unbekannte (a,b,c,d).

Diese bilden ein inhomogenes lineares Gleichungssystem: $\begin{pmatrix}13&0&-3&0\\0&2&0&-1\\3&0&-2&2\\0&1&2&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\-1\\-3\\2\end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}13&0&-3&0&-10\\0&2&0&-1&-1\\3&0&-2&2&-3\\0&1&2&-5&2\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&5&-8&2\\0&0&-4&9&-5\\3&0&-2&2&-3\\0&1&2&-5&2\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&1&-3\\0&0&-4&9&-5\\0&0&-17&26&-9\\0&1&2&-5&2\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&1&-3\\0&0&-4&9&-5\\0&0&-1&-10&11\\0&1&2&-5&2\end{array}\right)\cdot(-1) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-9&8\\0&0&0&49&-49\\0&0&1&10&-11\\0&1&0&-25&24\end{array}\right):49 \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&-1\\0&0&0&1&-1\\0&0&1&0&-1\\0&1&0&0&-1\end{array}\right)$$

Das heißt: $a=b=c=d=-1$,

$$x_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix}2\\-3\\-1\\-1\\3\end{pmatrix}, \quad d(E_1,E_2) = \|x_1 - x_2\| = \left\|\begin{pmatrix}-3\\4\\2\\2\\-4\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{9+16+4+4+16} = \sqrt{49} = 7$$

<u>Alternativ:</u> Man berechnet $[y_1,y_2,y_3,y_4]^\perp$ als Lösungsmenge des homogenen LGS mit der Matrix

$$\begin{pmatrix}2&0&3&0&0\\0&1&0&0&1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&2&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}2&0&0&3&0\\0&1&0&-2&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&2&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow [y_1,y_2,y_3,y_4]^\perp = \left[\begin{pmatrix}-3\\4\\2\\2\\-4\end{pmatrix}\right]$$

$$x_1 - x_2 \overset{!}{\in} [y_1,y_2,y_3,y_4]^\perp \iff \begin{pmatrix}-1+2a\\5+b\\4+3a-c\\1+c-2d\\b-4-d\end{pmatrix} = e\cdot\begin{pmatrix}-3\\4\\2\\2\\-4\end{pmatrix}$$ ergibt dann das folgende

inhomogene LGS: $\begin{pmatrix}2&0&0&0&3\\0&1&0&0&-4\\3&0&-1&0&-2\\0&0&1&-2&-2\\0&1&0&-1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-5\\-4\\-1\\4\end{pmatrix}$ mit Lösung $a=b=c=d=-1$, $e=1$, und damit x_1, x_2, $d(E_1,E_2)$ wie oben.

Aufgabe II.3

a) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch $\Rightarrow$ $\exists$ orthogonale Matrix S $(S^{-1} = S^T)$ mit

$$S^T A S = \begin{pmatrix} c_1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & c_1 & & & & & \\ & & & c_2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & c_k & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & c_k \end{pmatrix} =: \tilde{A}$$, wobei $c_1, c_2, \ldots, c_k$ paarweise verschiedene

Eigenwerte von A sind. A positiv definit $\Rightarrow c_1, c_2, \ldots, c_k > 0$.

$$\begin{pmatrix} c_1^2 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & c_1^2 & & & & & \\ & & & c_2^2 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & c_k^2 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & c_k^2 \end{pmatrix} = \tilde{A}^2 = (S^T A S)^2 = S^T A^2 S$$, d.h. A^2 ist diagonalisierbar

und hat genau die Eigenwerte $c_1^2, c_2^2, \ldots, c_k^2$. Diese sind paarweise verschieden wegen: $c_i^2 = c_j^2 \Leftrightarrow |c_i| = |c_j| \Leftrightarrow c_i = c_j$, denn $c_i, c_j > 0$.

Damit ist gezeigt: A und A^2 haben die gleiche Anzahl von Eigenwerten.

Sei nun x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert c_i. Dann ist:

$$A^2 x = A(Ax) = A\, c_i x = c_i\, Ax = c_i^2 x,$$

das heißt x ist Eigenvektor von A^2 zum Eigenwert c_i^2.

Mit $E_i :=$ Eigenraum von A zum Eigenwert c_i, $\tilde{E}_i :=$ Eigenraum von A^2 zum Eigenwert c_i^2

gilt also: $E_i \subseteq \tilde{E}_i$. $(\Rightarrow \dim E_i \leq \dim \tilde{E}_i)$

noch zu zeigen: $\tilde{E}_i \subseteq E_i$.

A diagonalisierbar $\Rightarrow \mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i \Rightarrow n = \sum_{i=1}^{k} \dim E_i$

A^2 diagonalisierbar $\Rightarrow \mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{k} \tilde{E}_i \Rightarrow n = \sum_{i=1}^{k} \dim \tilde{E}_i$

Angenommen: $\tilde{E}_i \not\subseteq E_i \Rightarrow \exists x \in \tilde{E}_i \setminus E_i \Rightarrow \dim \tilde{E}_i > \dim E_i$

$$\Rightarrow n = \sum_{i=1}^{k} \dim E_i < \sum_{i=1}^{k} \dim \tilde{E}_i = n \quad ⚡ \quad \text{also } \tilde{E}_i \subseteq E_i.$$

b) Die gesuchte Matrix muß symmetrisch, aber nicht positiv definit sein.

Betrachte beispielsweise $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

A hat die Eigenwerte 1 und -1 und die Eigenräume $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ und $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat nur den Eigenwert 1, und der Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ von A^2 ist kein Eigenvektor von A.

<u>Alternativ</u>: Betrachte $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. A hat die Eigenwerte 1 und -1 und die Eigenräume $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ und $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat nur den Eigenwert 1, und der Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ von A^2 ist kein Eigenvektor von A.

Aufgabe II.4

ϕ eigentliche Drehung im $\mathbb{R}^3$, $\phi \neq id$

$\Rightarrow$ ϕ hat einen eindimensionalen Eigenraum $[\mathfrak{a}]$ zum Eigenwert 1 (die Drehachse),

und: $\forall x \in \mathbb{R}^3 : \phi(x) - x \perp \mathfrak{a}$.

Also: $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \perp \mathfrak{a}$ und $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-5\\4\end{pmatrix} \perp \mathfrak{a}$.

$$\Rightarrow \underline{\underline{[\mathfrak{a}]}} = \left[\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-5\\4\end{pmatrix}\right]^{\perp} = \left[\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right]^{\perp} = \underline{\underline{\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]}}$$

4

Für das folgende setzt man $\mathfrak{a} := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. (Nach der Aufgabenstellung ist $\mathfrak{a}$ nur bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt.)

Zur Bestimmung des Drehwinkels ω:

Zerlege $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ in einen Vektor aus $[\mathfrak{a}]$ und einen Vektor $y \in [\mathfrak{a}]^{\perp}$:

$$\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \lambda \cdot \mathfrak{a} + y \quad \rightsquigarrow \quad \left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \mathfrak{a} \right\rangle = \langle \lambda \mathfrak{a} + y, \mathfrak{a} \rangle = \lambda \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle$$

$$\rightsquigarrow 3 = 3\lambda \quad \rightsquigarrow \lambda = 1 \quad \rightsquigarrow y = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - 1 \cdot \mathfrak{a} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

(oder mit dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren:

$$y = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \mathfrak{a} \right\rangle}{\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a} \rangle} \mathfrak{a} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{3}{3}\mathfrak{a} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - \mathfrak{a} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}. \quad)$$

Somit: $\phi\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \phi(\mathfrak{a} + y) = \phi(\mathfrak{a}) + \phi(y) = \mathfrak{a} + \phi(y)$

$$\Rightarrow \phi(y) = \phi\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right) - \mathfrak{a} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Wegen $y \in [\mathfrak{a}]^{\perp}$ ist der Drehwinkel ω der Winkel zwischen y und $\phi(y)$.

$$\langle y, \phi(y) \rangle = \cos\omega \, \|y\| \, \|\phi(y)\| \quad \Rightarrow \quad \cos\omega = \frac{\langle y, \phi(y) \rangle}{\|y\| \, \|\phi(y)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Damit: $\underline{\underline{\omega = \frac{\pi}{3}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2\\0 & \sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}}}$. $\quad \left(\tilde{A} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\omega & -\sin\omega\\0 & \sin\omega & \cos\omega\end{pmatrix}\right)$

Die Normalform wird angenommen bezüglich der Orthonormalbasis $\{b_1, b_2, b_3\}$ mit

$$\underline{\underline{b_1}} := \frac{\mathfrak{a}}{\|\mathfrak{a}\|} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}}, \quad \underline{\underline{b_2}} := \frac{y}{\|y\|} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}},$$

$$\phi(b_2) = \tfrac{1}{2} b_2 + \tfrac{\sqrt{3}}{2} b_3 \quad \Rightarrow \quad b_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\phi(b_2) - \frac{1}{2} b_2\right)$$

$$\rightsquigarrow \underline{\underline{b_3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}} y\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\phi(y) - \frac{1}{\sqrt{6}} y = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\phi(y) - y\right) = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}}}.$$

Aufgabe II.3

Zuerst einmal einiges Wissenswertes über Projektionen / Orthogonalprojektionen:

ϕ Projektion $\Leftrightarrow$ $\phi^2 = \phi$ $\Leftrightarrow$ V ist die direkte Summe der Eigenräume von ϕ zu den Eigenwerten 0 und 1.

(Wegen $\phi^2 = \phi$ gilt für Eigenwerte λ von ϕ: $\lambda^2 = \lambda \Rightarrow \lambda \in \{0,1\}$;
wäre ϕ nicht diagonalisierbar, so wäre (Jordannormalform betrachten!) $\phi^2 \neq \phi$;
die Umkehrung folgt durch Nachrechnen; Anmerkung: die Eigenräume von ϕ zu den Eigenwerten 0 und 1 sind gerade Kern ϕ und Bild ϕ.)

Eine Orthogonalprojektion liegt vor, falls zusätzlich die Eigenräume von ϕ zu den Eigenwerten 0 und 1 zueinander orthogonal sind.

$$\phi \circ \phi^* = \phi \circ (2\phi^2 - \phi) = 2\phi^3 - \phi^2 = (2\phi^2 - \phi) \circ \phi = \phi^* \circ \phi \quad \Rightarrow \phi \text{ normal},$$

das heißt es gibt eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von ϕ.

Nach den obigen Vorbemerkungen ist daher nur noch zu zeigen, daß ϕ keine anderen Eigenwerte als 0 und 1 besitzt.

Sei v ein normierter Eigenvektor von ϕ zum (komplexen) Eigenwert λ. Dann ist:

$\langle \phi(v), v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle = \lambda$, und andererseits:

$\langle \phi(v), v \rangle = \langle v, \phi^*(v) \rangle = \langle v, (2\phi^2 - \phi)(v) \rangle = \langle v, (2\lambda^2 - \lambda) v \rangle = \overline{2\lambda^2 - \lambda} \langle v, v \rangle$,

also: $\lambda = \overline{2\lambda^2 - \lambda} = 2\overline{\lambda}^2 - \overline{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda + \overline{\lambda} = 2\overline{\lambda}^2$.

Sei nun $\lambda = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Dann folgt:

$\lambda + \overline{\lambda} = 2x$, $\quad 2\overline{\lambda}^2 = 2(x - iy)^2 = 2(x^2 - 2ixy - y^2)$, also:

$\lambda + \overline{\lambda} = 2\overline{\lambda}^2 \Leftrightarrow x = (x^2 - y^2) - 2ixy \Leftrightarrow x = x^2 - y^2$ und $-2xy = 0$.

$-2xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $y = 0$

falls $x = 0$: $\quad y^2 = x^2 - x = 0$, d.h. $\lambda = 0$.

falls $y = 0$: $\quad x = x^2 \Leftrightarrow x \in \{0,1\}$, d.h. $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$.

Also ist ϕ eine Orthogonalprojektion.

a) Zunächst bestimmt man die Normalform von Q_a:

$$(a+3)x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 - 2x_1 - 4x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \left(x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 - 4x_2x_3\right) + x_2^2 + (a+2)x_1^2 - 2x_1 - 4x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (x_2-2)^2 - 4 + (a+2)x_1^2 - 2x_1 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (x_2-2)^2 + (a+2)x_1^2 - 2(x_1+4) = 0$$

Q und Q_a sind affin äquivalent

$\Leftrightarrow$ Q und Q_a haben dieselbe Normalform

$\Leftrightarrow$ $a+2=0$. Also: $\underline{\underline{M = \{-2\}}}$

b) Q_{-2}: $(x_1-2x_2+x_3)^2 + (x_2-2)^2 +$

b) Q_{-2}: $(x_1-2x_2+x_3)^2 + (x_2-2)^2 - 2(x_1+4) =: y_1^2 + y_2^2 - 2y_3 = 0.$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in Q_{-2} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_2 - 2 \\ x_1 + 4 \end{pmatrix} \in Q,$$

das heißt: $\psi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_2 - 2 \\ x_1 + 4 \end{pmatrix}$ führt Q_{-2} in Q über.

Also führt ψ^{-1} Q in Q_{-2} über.

Zur Bestimmung von ψ^{-1}:

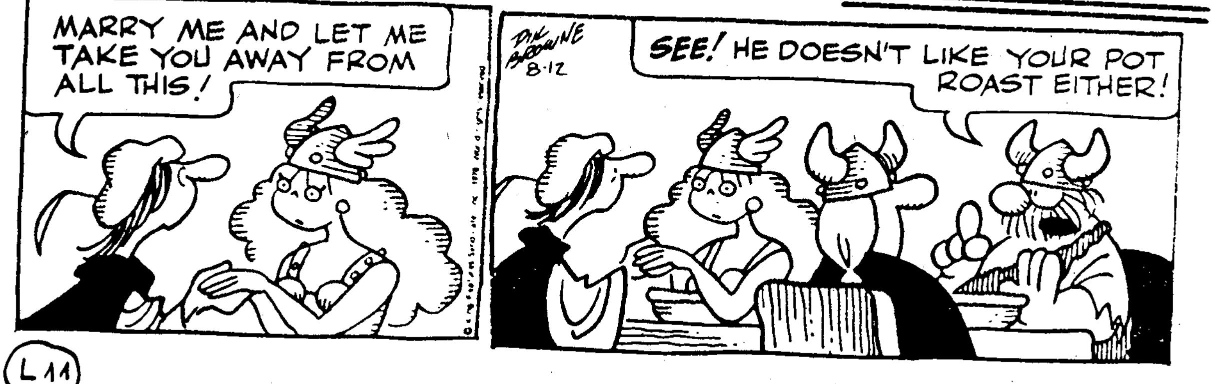
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\psi} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_2 - 2 \\ x_1 + 4 \end{pmatrix}$$

$y_2 = x_2 - 2 \Rightarrow x_2 = y_2 + 2$

$y_3 = x_1 + 4 \Rightarrow x_1 = y_3 - 4$

$\rightsquigarrow$ $x_3 = y_1 + 2x_2 - x_1 = y_1 + 2y_2 - y_3 + 8$

Also: $\underline{\underline{\psi^{-1} =: \varphi : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_3 - 4 \\ y_2 + 2 \\ y_1 + 2y_2 - y_3 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}}}.$



L 11