I.1 (4 Punkte)
Für jede Menge M bezeichne $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge. Weiter sei für eine Abbildung $f : A \to B$ die Abbildung f_* definiert durch

$$f_* : \begin{cases} \mathcal{P}(A) & \to & \mathcal{P}(B) \\ A_1 & \mapsto & f_*(A_1) := \{f(a) \,|\, a \in A_1\} \end{cases} .$$

Zeigen Sie:

a) Für Mengen A, B, C und Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ gilt

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* \quad .$$

b) Die Abbildung $f : A \to B$ ist genau dann injektiv, wenn $f_* : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ injektiv ist.

Lösung:
a)
Zu zeigen ist:

Für jede Untermenge $A_1 \subset A$ gilt $(g \circ f)_*(A_1) = (g_* \circ f_*)(A_1)$.

Es gilt:
$(g \circ f)_*(A_1) = \{g(f(a))|a \in A_1\} = \{g(f(a))|f(a) \in f_*(A_1)\} = \{g(b)|b \in f_*(A_1)\} = g_*(f_*(A_1)) = (g_* \circ f_*)(A_1)$.

b)

Beh: f injektiv $\iff$ f_* injektiv.

Bew:
'$\Longrightarrow$'

Zu zeigen: Für alle $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(A)$ gilt $f_*(A_1) = f_*(A_2) \Longrightarrow A_1 = A_2$.

'$\subset$'
Für $a \in A_1$ gilt $f(a) \in f_*(A_1) = f_*(A_2)$. Also existiert ein $a_2 \in A_2$ mit $f(a) = f(a_2)$. Da f injektiv ist, folgt hieraus $a = a_2 \in A_2$.

'$\supset$'
Für $a \in A_2$ gilt $f(a) \in f_*(A_2) = f_*(A_1)$. Also existiert ein $a_1 \in A_1$ mit $f(a) = f(a_1)$. Da f injektiv ist, folgt hieraus $a = a_1 \in A_1$.

'$\Longleftarrow$'

Zu zeigen: Für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt $f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2$.

Definiere die Mengen $A_1 = \{a_1\}$ und $A_2 = \{a_2\}$. Mit $f(a_1) = f(a_2)$ folgt dann

$$f_*(A_1) = \{f(a_1)\} = f_*(A_2).$$

Da f_* injektiv ist, folgt daraus $A_1 = A_2$, also $a_1 = a_2$.

I.2 (4 Punkte)
Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und U, W_1, W_2 Untervektorräume von V mit der Eigenschaft

$$V = U \oplus W_1 = U \oplus W_2.$$

Ferner seien die linearen Abbildungen $\Phi, \Psi : V \to V$ gegeben durch

$$\Phi \;:\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{w}_1 \;\mapsto\; \boldsymbol{u}_1 \qquad (\boldsymbol{u}_1 \in U\,,\, \boldsymbol{w}_1 \in W_1),$$

$$\Psi \;:\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{w}_2 \;\mapsto\; \boldsymbol{w}_2 \qquad (\boldsymbol{u}_2 \in U\,,\, \boldsymbol{w}_2 \in W_2).$$

Zeigen Sie:

$$W_1 = W_2 \quad\Longleftrightarrow\quad \Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi.$$

Lösung:

'$\Longrightarrow$'

Sei $W_1 = W_2 =: W$ und für jedes $\boldsymbol{x} \in V$ sei $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$ die eindeutige Zerlegung von $\boldsymbol{x}$ mit $\boldsymbol{u} \in U$ und $\boldsymbol{w} \in W$.
Dann gilt für alle $\boldsymbol{x} \in V$:
$(\Phi \circ \Psi)(\boldsymbol{x}) = \Phi(\Psi(\boldsymbol{x})) = \Phi(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{o}$ und $(\Psi \circ \Phi)(\boldsymbol{x}) = \Psi(\Phi(\boldsymbol{x})) = \Psi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}$.
Damit sind beide Abbildungen gleich der Nullabbildung, d.h.: $\Phi \circ \Psi = \Omega = \Psi \circ \Phi$.

'$\Longleftarrow$'

Zu zeigen: $W_1 = W_2$.

'$\subset$'

Sei $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$ und

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{u}_2$$

die eindeutige Zerlegung von $\boldsymbol{w}_1$ mit $\boldsymbol{w}_2 \in W_2$ und $\boldsymbol{u}_2 \in U$. Dann gilt

$$\boldsymbol{o} = \Psi(\boldsymbol{o}) = \Psi(\Phi(\boldsymbol{w}_1)) = \Phi(\Psi(\boldsymbol{w}_1)) = \Phi(\Psi(\boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{u}_2)) = \Phi(\boldsymbol{w}_2) = \Phi(\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{u}_2) = -\boldsymbol{u}_2.$$

Daraus folgt $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{o}$, oder gleichbedeutend $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2 \in W_2$.

'$\supset$' (analog zu '$\subset$').
Sei $\boldsymbol{w}_2 \in W_2$ und

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{u}_1$$

die eindeutige Zerlegung von $\boldsymbol{w}_2$ mit $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$ und $\boldsymbol{u}_1 \in U$. Dann gilt

$$\boldsymbol{o} = \Psi(\boldsymbol{u}_1) = \Psi(\Phi(\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{u}_1)) = \Psi(\Phi(\boldsymbol{w}_2)) = \Phi(\Psi(\boldsymbol{w}_2)) = \Phi(\boldsymbol{w}_2) = \Phi(\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1.$$

Daraus folgt $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{o}$, oder gleichbedeutend $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_1 \in W_1$.

I.3 (4 Punkte)
Im reellen Vektorraum $V \subset \mathbb{R}[x]$ der reellen Polynome vom Grad ≤ 4 sei durch das lineare Gleichungssystem

$$(*)\qquad \begin{array}{rcrcrcrcrcl} \alpha_0 & + & \alpha_1 & & & - & \alpha_3 & - & \alpha_4 & = & 0 \\ \alpha_0 & + & 2\alpha_1 & + & \alpha_2 & & & - & \alpha_4 & = & 0 \\ 3\alpha_0 & + & \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & - & \alpha_3 & + & \alpha_4 & = & 0 \end{array}$$

ein Untervektorraum

$$W = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 \,|\, (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \text{ ist Lösung von } (*)\}$$

gegeben. Weiter sei für jedes $\beta \in \mathbb{R}$ ein Untervektorraum

$$U_\beta := [1 - x + \beta x^2\,,\ x - x^2 + \beta x^3\,,\ x^2 - x^3 + \beta x^4]$$

von V definiert.

a) Bestimmen Sie alle $\beta \in \mathbb{R}$, für die $U_\beta + W = V$ gilt.

b) Sei $\beta = 1$. Bestimmen Sie eine Basis von $(U_1 + W)/(U_1 \cap W)$.

Lösung:
a)

$$(*)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt: $W = [1 - x^2 + x^3\,,\ x - x^2 + x^4]$.

$$\begin{aligned} W + U_\beta &= [\underbrace{1 - x^2 + x^3}_{\boldsymbol{w}_1}, \underbrace{x - x^2 + x^4}_{\boldsymbol{w}_2}, \underbrace{1 - x + \beta x^2}_{\boldsymbol{u}_1}, \underbrace{x - x^2 + \beta x^3}_{\boldsymbol{u}_2}, \underbrace{x^2 - x^3 + \beta x^4}_{\boldsymbol{u}_3}] \\ &= [\underbrace{1 - x^2 + x^3}_{\boldsymbol{w}_1}, \underbrace{x - x^2 + x^4}_{\boldsymbol{w}_2}, \underbrace{\beta x^2 - x^3 + x^4}_{\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2}, \underbrace{\beta x^3 - x^4}_{\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{w}_2}, \underbrace{x^2 - x^3 + \beta x^4}_{\boldsymbol{u}_3}] \\ &= [\underbrace{1 - x^2 + x^3}_{\boldsymbol{w}_1}, \underbrace{x - x^2 + x^4}_{\boldsymbol{w}_2}, \underbrace{x^2 - x^3 + \beta x^4}_{\boldsymbol{u}_3}, \underbrace{\beta x^3 - x^4}_{\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{w}_2}, \underbrace{\beta x^2 - x^3 + x^4}_{\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2}] \\ &= [\underbrace{1 - x^2 + x^3}_{\boldsymbol{w}_1}, \underbrace{x - x^2 + x^4}_{\boldsymbol{w}_2}, \underbrace{x^2 - x^3 + \beta x^4}_{\boldsymbol{u}_3}, \underbrace{\beta x^3 - x^4}_{\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{w}_2}, \underbrace{(\beta - 1)x^3 + (1 - \beta^2)x^4}_{\boldsymbol{u}_1 - \beta\boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2}] \\ &= [\underbrace{1 - x^2 + x^3}_{\boldsymbol{w}_1}, \underbrace{x - x^2 + x^4}_{\boldsymbol{w}_2}, \underbrace{x^2 - x^3 + \beta x^4}_{\boldsymbol{u}_3}, \underbrace{\beta x^3 - x^4}_{\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{w}_2}, \underbrace{-x^3 + (2 - \beta^2)x^4}_{\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 - \beta\boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{w}_1 + 2\boldsymbol{w}_2}\ ] \\ &= [\underbrace{1 - x^2 + x^3}_{\boldsymbol{w}_1}, \underbrace{x - x^2 + x^4}_{\boldsymbol{w}_2}, \underbrace{x^2 - x^3 + \beta x^4}_{\boldsymbol{u}_3}, \underbrace{x^3 - (2 - \beta^2)x^4}_{-\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \beta\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{w}_1 - 2\boldsymbol{w}_2}, \underbrace{(-1 + 2\beta - \beta^3)x^4}_{=:\boldsymbol{z}}] \end{aligned}$$

Dabei ist $\boldsymbol{z} = (-1 + 2\beta - \beta^3)x^4 = \beta\boldsymbol{u}_1 + (1 - \beta)\boldsymbol{u}_2 - \beta^2\boldsymbol{u}_3 - \beta\boldsymbol{w}_1 + (2\beta - 1)\boldsymbol{w}_2$.
Wegen $\dim(W + U_\beta) \geq 4$ (die ersten vier Vektoren sind für alle $\beta \in \mathbb{R}$ l.u. und bilden mit x^4 eine Basis von V) folgt

$$W + U_\beta = V \iff \boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{o} \iff -1 + 2\beta - \beta^3 \neq 0 \iff \beta \in \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\}.$$

b) Für $\beta = 1$ gilt nach a) $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_3 - \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{o}$, also $\boldsymbol{y} := \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2 \in (U_1 \cap W)$. Weiter ist $\dim(U_1 \cap W) = \dim(U_1) + \dim(W) - \dim(U_1 + W) = 3 + 2 - 4 = 1$, also $U_1 \cap W = [\boldsymbol{y}]$. Eine Basis von $(U_1 + W)/(U_1 \cap W)$ ergibt sich nach a) wegen $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{y}$ zu

$$\{\boldsymbol{w}_1 + [\boldsymbol{y}], \boldsymbol{u}_1 + [\boldsymbol{y}], \boldsymbol{u}_2 + [\boldsymbol{y}]\} = \{(1 - x^2 + x^3) + [\boldsymbol{y}], (1 - x + x^2) + [\boldsymbol{y}], (x - x^2 + x^3) + [\boldsymbol{y}]\}\,.$$

I.4 (4 Punkte)
Es seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $\Phi : V \to V$ eine lineare Selbstabbildung sowie λ ein Eigenwert von Φ mit zugehörigem Eigenraum $U \neq V$. Weiter sei

$$\Psi : \begin{cases} V/U & \to & V/U \\ \boldsymbol{x} + U & \mapsto & \Phi(\boldsymbol{x}) + U \end{cases}$$

die von Φ auf V/U induzierte lineare Abbildung.
Zeigen Sie:

a) Ist Φ diagonalisierbar, so auch Ψ.

b) Die Umkehrung von a) gilt nicht.

c) Ist $\lambda = 0$, so gilt:
$$\Psi = \mathrm{id}_{V/U} \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi \text{ ist Projektion.}$$

Lösung:
a) Ist Φ diagonalisierbar, so hat V eine Basis B aus Eigenvektoren von Φ. Für $\boldsymbol{b} \in B$ sei $\lambda_{\boldsymbol{b}}$ der zugehörige Eigenwert. Dann ist

$$B' := \{\boldsymbol{b} \in B \mid \lambda_{\boldsymbol{b}} = \lambda\}$$

eine Basis von U und
$$\tilde{B} := \{\boldsymbol{b} + U \mid \boldsymbol{b} \in B \setminus B'\}$$
eine Basis von V/U. $\tilde{B}$ ist sogar Diagonalbasis von Ψ, denn es gilt für alle $\boldsymbol{b} + U \in \tilde{B}$

$$\Psi(\boldsymbol{b} + U) = \Phi(\boldsymbol{b}) + U = \lambda_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b} + U = \lambda_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{b} + U)\,.$$

b) Gegenbeispiel: $V := \mathbb{R}^2$, der Endomorphismus Φ sei gegeben durch seine Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Φ ist nicht diagonalisierbar - die Abbildungsmatrix hat bereits Jordansche Normalform - , $\lambda := 0$ ist einziger Eigenwert von Φ. Dann ist $U = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$, und wegen $\Phi(V) \subset U$ gilt $\Psi = \Omega$ (Nullabbildung). Also ist Ψ diagonalisierbar.
c) Sei $\lambda = 0$. Zu zeigen:

$$\Psi = \mathrm{id}_{V/U} \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi \text{ ist Projektion.}$$

'$\Longrightarrow$'

Sei $\boldsymbol{x} \in V$. Wegen
$$\boldsymbol{x} + U = \Psi(\boldsymbol{x} + U) = \Phi(\boldsymbol{x}) + U$$
existiert zu $\boldsymbol{x}$ ein $\boldsymbol{u} \in U$ mit $\Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}$. Damit folgt

$$\Phi^2(\boldsymbol{x}) = \Phi(\Phi(\boldsymbol{x})) = \Phi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}) = \Phi(\boldsymbol{x}) + \Phi(\boldsymbol{u}) = \Phi(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{o} = \Phi(\boldsymbol{x})\,.$$

Da dies für alle $\boldsymbol{x} \in V$ gilt, ist $\Phi^2 = \Phi$ und damit Φ Projektion.

'$\Longleftarrow$'

Für eine Projektion Φ gilt : $V = \text{Bild } \Phi \oplus \text{Kern } \Phi = \text{Bild } \Phi \oplus U$ und $\Phi|_{\text{Bild } \Phi} = \mathrm{id}$. Ist $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_r\}$ eine Basis von Bild Φ, so ist $\{\boldsymbol{b}_1 + U, \ldots, \boldsymbol{b}_r + U\}$ eine Basis von V/U. Dabei gilt für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$:

$$\Psi(\boldsymbol{b}_i + U) = \Phi(\boldsymbol{b}_i) + U = \boldsymbol{b}_i + U\,, \text{ also } \Psi = \mathrm{id}\,.$$

I.5 (4 Punkte)
Es seien V der Vektorraum der (n,n)-Matrizen über dem Körper $\mathbb{K}$ und $\mathcal{A},\mathcal{B}$ fest gegebene Matrizen aus V. Die lineare Abbildung $\Phi : V \to V$ sei definiert durch

$$\Phi(\mathcal{X}) := \mathcal{A}\mathcal{X}\mathcal{B}\,.$$

Zeigen Sie:

a) Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Diagonalmatrizen, so ist die Abbildung Φ diagonalisierbar. Geben Sie in diesem Fall eine Basis aus Eigenvektoren an.

b) Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ diagonalisierbar, so ist auch die Abbildung Φ diagonalisierbar.

Lösung:
a) Seien

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix},\ \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix},\ \mathcal{E}_{ij} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array} & \end{array}$$

Es ist $B := \{\mathcal{E}_{ij} \,|\, i,j \in \{1,\dots,n\}\}$ eine Basis von V. Weiter gilt für alle $i,j \in \{1,\dots,n\}$:

$$\Phi(\mathcal{E}_{ij}) = \mathcal{A}\mathcal{E}_{ij}\mathcal{B} = \alpha_i\beta_j\mathcal{E}_{ij}\,,$$

so daß B eine Eigenbasis und damit Φ diagonalisierbar ist.
b)

$$\mathcal{A} \text{ ist diagonalisierbar} \iff \exists \text{ reguläres } \mathcal{T} \in V \,:\, \mathcal{T}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\alpha}_n \end{pmatrix} =: \overline{\mathcal{A}},$$

$$\mathcal{B} \text{ ist diagonalisierbar} \iff \exists \text{ reguläres } \mathcal{S} \in V \,:\, \mathcal{S}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \overline{\beta}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\beta}_n \end{pmatrix} =: \overline{\mathcal{B}}\,.$$

Setze $\mathcal{F}_{ij} := \mathcal{T}\mathcal{E}_{ij}\mathcal{S}^{-1} \quad (i,j \in \{1,\dots,n\})$.
Beh.: $C := \{\mathcal{F}_{ij} \,|\, i,j \in \{1,\dots,n\}\}$ ist Eigenbasis von V.
Bew.: Zunächst sind die n^2 Vektoren $\mathcal{F}_{ij}$ linear unabhängig:

$$\mathcal{O} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\mathcal{F}_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\mathcal{T}\mathcal{E}_{ij}\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{T}\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\mathcal{E}_{ij}\Big)\mathcal{S}^{-1}$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{O}\mathcal{S} = \mathcal{O}\,.$$

Da die Vektoren $\mathcal{E}_{ij}$ l.u. sind, folgt daraus für alle $i,j \in \{1,\dots,n\}$: $\lambda_{ij} = 0$, also die lineare Unabhängigkeit der $\mathcal{F}_{ij}$. Aus $\dim V = n^2$ ergibt sich, daß C Basis von V ist.
Für $\mathcal{F}_{ij} \in C$ gilt

$$\Phi(\mathcal{F}_{ij}) = \mathcal{A}\mathcal{F}_{ij}\mathcal{B} = (\mathcal{T}\overline{\mathcal{A}}\mathcal{T}^{-1})(\mathcal{T}\mathcal{E}_{ij}\mathcal{S}^{-1})(\mathcal{S}\overline{\mathcal{B}}\mathcal{S}^{-1}) = \mathcal{T}(\overline{\mathcal{A}}\mathcal{E}_{ij}\overline{\mathcal{B}})\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{T}(\overline{\alpha}_i\overline{\beta}_j\mathcal{E}_{ij})\mathcal{S}^{-1} = \overline{\alpha}_i\overline{\beta}_j\mathcal{F}_{ij}\,.$$

Also ist C Eigenbasis und damit Φ diagonalisierbar.

I.6 (4 Punkte)
Bestimmen Sie alle $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, so daß die Matrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

regulär ist.

Lösung:
Durch Subtraktion der vorletzten Zeile von der letzten, anschließender Subtraktion der drittletzten Zeile von der vorletzten .... bis schließlich die erste Zeile von der zweiten subtrahiert wird, ergibt sich

$$\det \mathcal{A} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-2} & a_{n-2} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} \begin{array}{ccc} & & (-1) \\ & (-1) & \hookleftarrow \\ & \hookleftarrow & \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ & (-1) & \\ (-1) & \hookleftarrow & \\ \hookleftarrow & & \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2 - a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & a_3 - a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & a_3 - a_2 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & a_{n-1} - a_{n-2} & a_{n-1} - a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n - a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \cdot (a_2 - a_1) \cdot (a_3 - a_2) \cdots (a_{n-1} - a_{n-2}) \cdot (a_n - a_{n-1})$$

Also gilt:

$$\mathcal{A} \text{ regulär} \iff \det \mathcal{A} \neq 0 \iff a_1 \neq 0 \text{ und } a_{i+1} \neq a_i \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

II.1 (4 Punkte)
Es sei Φ ein Endomorphismus eines 5-dimensionalen komplexen Vektorraums V mit dem charakteristischen Polynom

$$p = x^5 - 9x^3.$$

Ferner sei $\dim(\text{Kern } \Phi) = 1$. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von Φ^2.

Lösung:
Die Eigenwerte von Φ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p = x^5 - 9x^3 = (x-3)(x+3)x^3\,,$$

also $3, -3$ und 0.
Da 3 und -3 einfache Nullstellen sind, ist $\dim E_3 = 1 = \dim E_{-3}$. Außerden ist $\dim E_0 = \dim(\text{Kern } \Phi) = 1$. Damit lautet die Jordansche Normalform von Φ:

$$\mathcal{J}_\Phi = \begin{pmatrix} 3 & & & & \\ & -3 & & & \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildungsmatrix von Φ^2 bezüglich der zu $\mathcal{J}_\Phi$ gehöhrigen Jordanbasis B ist

$$(\mathcal{J}_\Phi)^2 = \begin{pmatrix} 9 & & & & \\ & 9 & & & \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vertauschung des 4. und 5. Basisvektors von B ergibt

$$\begin{pmatrix} 9 & & & & \\ & 9 & & & \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

eine Jordannormalform von Φ^2.

II.2 (4 Punkte)
Es seien V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ und Φ ein Endomorphismus von V. Durch

$$F : \begin{cases} V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) & \mapsto & F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle \end{cases}$$

wird eine Bilinearform erklärt.

a) Zeigen Sie:
F ist genau dann ein Skalarprodukt auf V, wenn Φ selbstadjungiert ist und alle Eigenwerte von Φ positiv sind.

b) Es sei $V = \mathbb{R}^3$ versehen mit dem Standardskalarprodukt und $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ die Standardbasis. Weiter sei der Endomorphismus Φ des $\mathbb{R}^3$ definiert durch:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{e}_1) &= \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \Phi(\vec{e}_2) &= -\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 \ . \\ \Phi(\vec{e}_3) &= 5\vec{e}_3 \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß F ein Skalarprodukt ist.

Lösung: a) Wir zeigen zunächst: $(*)$ $\quad F$ symmetrisch $\iff \Phi$ selbstadjungiert.

$$F \text{ symmetrisch } \iff \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V : F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \iff$$

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V : \langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} \rangle = \langle \Phi(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \Phi(\boldsymbol{y}) \rangle \iff \Phi \text{ selbstadjungiert.}$$

Beh: F Skalarprodukt $\iff$ Φ selbstadjungiert mit ausschließlich positiven Eigenwerten.

'$\Longrightarrow$'

Ist F Skalarprodukt, so folgt nach $(*)$, daß Φ selbstadjungiert ist. Sei λ Eigenwert von Φ und $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann ist $\lambda > 0$ wegen

$$0 < F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \rangle = \langle \lambda \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \, .$$

'$\Longleftarrow$'

Da Φ selbstadjungiert ist, existiert eine Orthonormalbasis $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$. Dabei gelte $\forall i = 1, \ldots, n : \Phi(\boldsymbol{e}_i) = \lambda_i \boldsymbol{e}_i$.
Sei $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{e}_i \in V$ $(\xi_i \in \mathbb{R})$. Dann gilt

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i \boldsymbol{e}_i, \sum_{i=1}^{n} \xi_i \boldsymbol{e}_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2 \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i^2 \geq 0$$

und

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \iff \xi_1 = \cdots = \xi_n = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}.$$

Also ist F positiv definit.
b) Die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich der Standardbasis ist

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

Da die Standardbasis eine ONB und $\mathcal{A}$ symmetrisch ist, ist Φ selbstadjungiert. Φ besitzt nur positive Eigenwerte, wenn $\mathcal{A}$ positiv definit ist. Nach dem Hauptminorenkriterium von Hurwitz folgt die positive Definitheit aus

$$|1| = 1 > 0 \, , \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0 \text{ und } |\mathcal{A}| = 5 \cdot 3 = 15 > 0.$$

Nach a) ist F ein Skalarprodukt.

II.3 (4 Punkte)
In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ ist eine *Kreislinie* $k(M,r)$ mit Mittelpunkt $M \in \mathbb{R}^2$ und Radius $r > 0$ definiert durch

$$k(M,r) := \{X \in \mathbb{R}^2 | \, \|\overrightarrow{MX}\| = r\}.$$

Für jeden Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ und jede Kreislinie $k = k(M,r)$ sei

$$\kappa_k(P) := \|\overrightarrow{MP}\|^2 - r^2.$$

Zeigen Sie:

a) Ist $g \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade durch P mit $g \cap k = \{G_1, G_2\}$, so gilt:

$$\|\overrightarrow{PG_1}\| \cdot \|\overrightarrow{PG_2}\| = |\kappa_k(P)|.$$

b) Sind $k_1 = k(M_1, r_1)$ und $k_2 = k(M_2, r_2)$ zwei Kreislinien mit verschiedenen Mittelpunkten, so liegen alle Punkte $X \in \mathbb{R}^2$ mit $\kappa_{k_1}(X) = \kappa_{k_2}(X)$ auf einer Geraden, welche zur Geraden $M_1 M_2$ orthogonal ist.

Lösung:
In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ sei ein kartesisches Koordinatensystem $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ gegeben.
a) Sei $\vec{m} := \overrightarrow{OM}$, $\vec{x} := \overrightarrow{OX}$, $\vec{p} := \overrightarrow{OP}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} X \in k(M,r) \quad &\Longleftrightarrow \quad \|\overrightarrow{MX}\| = r \iff \|\vec{x} - \vec{m}\|^2 = r^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad \|\vec{x}\|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{m}\rangle + \|\vec{m}\|^2 - r^2 = 0 \iff \kappa_k(X) = 0\,. \end{aligned}$$

Sei $g \subset \mathbb{R}^2$ Gerade durch P: $\quad g \,:\, \vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{v}\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$ mit $\|\vec{v}\| = 1$. Damit gilt

$$\begin{aligned} X \in g \cap k(M,r) \quad &\Longleftrightarrow \quad \kappa_k(\vec{p} + \lambda\vec{v}) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \|\vec{p} + \lambda\vec{v}\|^2 - 2\langle \vec{p} + \lambda\vec{v}, \vec{m}\rangle + \|\vec{m}\|^2 - r^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \|\vec{p}\|^2 + 2\lambda\langle \vec{p}, \vec{v}\rangle + \lambda^2 - 2\lambda\langle \vec{v}, \vec{m}\rangle - 2\langle \vec{p}, \vec{m}\rangle + \|\vec{m}\|^2 - r^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \lambda^2 + 2\lambda\langle \vec{v}, \vec{p} - \vec{m}\rangle + \underbrace{\|\vec{p}\|^2 - 2\langle \vec{p}, \vec{m}\rangle + \|\vec{m}\|^2 - r^2}_{\kappa_k(P)} = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Gilt $g \cap k(M,r) = \{G_1, G_2\}$, so besitzt $(*)$ zwei Lösungen λ_1 und λ_2, für die wegen $\|\vec{v}\| = 1$ gilt

$$|\lambda_1| = \|\overrightarrow{PG_1}\| \text{ und } |\lambda_2| = \|\overrightarrow{PG_2}\|\,.$$

Aus $0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$ folgt mit $(*)$

$$|\kappa_k(P)| = |\lambda_1\lambda_2| = \|\overrightarrow{PG_1}\|\|\overrightarrow{PG_2}\| \quad \text{(Satz von Vieta).}$$

b) Seien $X \in \mathbb{R}^2$, $\vec{m}_i := \overrightarrow{OM}_i\ (i = 1, 2)$.

$$\begin{aligned} \kappa_{k_1}(X) = \kappa_{k_2}(X) \quad &\Longleftrightarrow \quad \|\overrightarrow{M_1X}\|^2 - r_1^2 = \|\overrightarrow{M_2X}\|^2 - r_2^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad \|\vec{x}\|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{m}_1\rangle + \|\vec{m}_1\|^2 - r_1^2 = \|\vec{x}\|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{m}_2\rangle + \|\vec{m}_2\|^2 - r_2^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2\langle \vec{x}, \vec{m}_2 - \vec{m}_1\rangle - (r_1^2 - r_2^2 - \|\vec{m}_1\|^2 + \|\vec{m}_2\|^2) = 0 \quad (**) \end{aligned}$$

Wegen $\vec{m}_2 \neq \vec{m}_1$ stellt $(**)$ die Gleichung einer Geraden dar, deren Richtung zu $\vec{m}_2 - \vec{m}_1 = \overrightarrow{M_1M_2}$ orthogonal ist.

II.4 (4 Punkte)
Im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt) sei bezüglich einer Orthonormalbasis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ ein Endomorphismus Φ durch die Abbildungsmatrix

$$\mathcal{A} = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}+\sqrt{3} & \sqrt{2} & -\sqrt{2}+\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & \gamma & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}+\sqrt{3} & -\sqrt{2} & \sqrt{2}+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie alle $\gamma \in \mathbb{R}$ so, daß Φ eine Isometrie ist.

b) Bestimmen Sie für $\gamma = 2\sqrt{2}$ die Normalform $\tilde{\mathcal{A}}$ der Isometrie Φ sowie eine Basis des $\mathbb{R}^3$, bezüglich der Φ die Abbildungsmatrix $\tilde{\mathcal{A}}$ hat.

Lösung:
a)

$$\Phi \text{ ist Isometrie} \iff \mathcal{A}\mathcal{A}^\top = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & -4+\sqrt{2}\gamma & 0 \\ -4+\sqrt{2}\gamma & \gamma^2+4 & 4-\sqrt{2}\gamma \\ 0 & 4-\sqrt{2}\gamma & 12 \end{pmatrix} = \mathcal{E} \iff \gamma = 2\sqrt{2}\,.$$

b) Sei nun $\gamma = 2\sqrt{2}$ und $\Psi := \Phi + \Phi^*$. Dann ist $\mathcal{B} := \mathcal{A} + \mathcal{A}^\top$ Abbildungsmatrix von Ψ bzgl. der geg. ONB. Das charakteristische Polynom p von $\mathcal{B}$ bzw. Ψ lautet:

$$p(\lambda) = |\mathcal{B} - \lambda\mathcal{E}| = \frac{1}{\sqrt{12}^3} \begin{vmatrix} 2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{12}\lambda & 0 & -2\sqrt{2}+2\sqrt{3} \\ 0 & 4\sqrt{2}-\sqrt{12}\lambda & 0 \\ -2\sqrt{2}+2\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{12}\lambda \end{vmatrix}.$$

Entwickeln nach der zweiten Spalte und Addition der ersten Spalte zur dritten Spalte ergibt

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \frac{1}{12}\Big(\frac{2\sqrt{6}}{3} - \lambda\Big) \begin{vmatrix} 2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{12}\lambda & 4\sqrt{3}-\sqrt{12}\lambda \\ -2\sqrt{2}+2\sqrt{3} & 4\sqrt{3}-\sqrt{12}\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \hookleftarrow \end{matrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{12}}\Big(\frac{2\sqrt{6}}{3} - \lambda\Big)\Big(\frac{2\sqrt{6}}{3} - \lambda\Big)(4\sqrt{3} - \sqrt{12}\lambda) = \Big(\frac{2\sqrt{6}}{3} - \lambda\Big)^2(2-\lambda)\,. \end{aligned}$$

Damit hat Ψ den einfachen Eigenwert 2 und den doppelten Eigenwert $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.
Der Eigenraum von Ψ zum Eigenwert 2 ist gleich dem Eigenraum E_1 von Φ zum Eigenwert 1.
Gaussumformungen ergeben

$$\mathcal{B} - 2\mathcal{E} = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}-2\sqrt{3} & 0 & -2\sqrt{2}+2\sqrt{3} \\ 0 & 4\sqrt{2}-4\sqrt{3} & 0 \\ -2\sqrt{2}+2\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{2}-2\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit folgt $E_1 = [\vec{e}_1]$ mit $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{b}_1 + \vec{b}_3)$.
Für den Drehwinkel ω gilt $\cos\omega = \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{6}}{3}$, $\sin\omega = \sqrt{1-\cos^2\omega} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, also

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}.$$

Eine Orthonormalbasis, bezüglich derer Φ die Normalgestalt annimmt, erhält man nach Wahl eines nomierten Vektors $\vec{e}_2$ in der Drehebene $[\vec{e}_1]^\perp$, etwa $\vec{e}_2 = \vec{b}_2$. Dann ist nach dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren

$$\vec{e}_3\,' := \Phi(\vec{e}_2) - \langle\Phi(\vec{e}_2), \vec{e}_2\rangle\vec{e}_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}(\vec{b}_1 - \vec{b}_3)$$

ein Vektor, der auf $[\vec{e}_1, \vec{e}_2]$ senkrecht steht. Normierung ergibt die gewünschte Orthonormalbasis

$$\{\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{b}_1 + \vec{b}_3), \vec{e}_2 = \vec{b}_2, \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{b}_1 - \vec{b}_3)\}\,.$$

II.5 (4 Punkte)
Es sei Φ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen unitären Vektorraums V. Mit Φ^* werde die adjungierte Abbildung von Φ bezeichnet. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(i) Φ ist normal.

(ii) Es gibt eine Isometrie Ψ von V mit $\Phi^* = \Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$.

Lösung:
Beh:
$$\text{(i)} \iff \text{(ii)}.$$

'$\Longleftarrow$'

Sei Ψ Isometrie mit $\Phi^* = \Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$. Dann gilt:

$$\Phi \circ \Phi^* = \Phi \circ (\Psi \circ \Phi) = (\Phi \circ \Psi) \circ \Phi = \Phi^* \circ \Phi\,,$$

also ist Φ normal.

'$\Longrightarrow$'

Sei Φ normal. Weil V endlichdimensional ist ($\dim V =: n$), existiert eine Orthonormalbasis $B = \{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ aus Eigenvektoren von Φ. Die jeweils zugehörigen Eigenwerte seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Bezüglich B gilt für die Abbildungsmatrizen von Φ bzw. Φ^*:

$$\mathcal{A}_\Phi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{A}_{\Phi^*} = \left(\overline{\mathcal{A}_\Phi}\right)^\top = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Wir setzen

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \gamma_i := \begin{cases} 1 & \text{für } \lambda_i = 0 \\ \frac{\overline{\lambda_i}}{\lambda_i} & \text{für } \lambda_i \neq 0 \end{cases}.$$

Wegen $|\gamma_i| = 1$ für $i = 1, \dots, n$ beschreibt $\mathcal{C}$, als Abbildungsmatrix bezüglich B aufgefaßt, eine Isometrie Ψ und wegen

$$\mathcal{A}_{\Phi^*} = \mathcal{A}_\Phi \mathcal{C} = \mathcal{C} \mathcal{A}_\Phi$$

folgt mit der so gefundenen Isometrie Ψ

$$\Phi^* = \Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi\,.$$

II.6 (4 Punkte)
Im reellen dreidimensionalen affinen Raum $\mathbb{A}^3$ sei bezüglich eines affinen Koordinatensystems $(O; \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ die Quadrik Q gegeben durch

$$Q \quad : \quad x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0.$$

Bestimmen Sie die affine Normalform $\tilde{Q}$ von Q und geben Sie eine Affinität φ an, die Q auf $\tilde{Q}$ abbildet.

Lösung:

$$\begin{aligned} 0 &= x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3 + 1)^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - 8x_2x_3 + 2x_3 - 1 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3 + 1)^2 - 2(x_2 + 2x_3)^2 + 7x_3^2 + 2x_3 - 1 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3 + 1)^2 - 2(x_2 + 2x_3)^2 + 7(x_3 + \frac{1}{7})^2 - \frac{8}{7} \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x_2 + \sqrt{7}x_3\right)^2}_{\overline{x}_1} - \underbrace{\left(\frac{\sqrt{14}}{4}x_1 + \frac{\sqrt{14}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{14}}{4}x_3 + \frac{\sqrt{14}}{4}\right)^2}_{\overline{x}_2} - \underbrace{\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}x_3 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}_{\overline{x}_3} + 1 = 0$$

Damit ist die Normalform $\tilde{Q}$ von Q gegeben durch

$$\tilde{Q} \,:\, \overline{x}_1^2 - \overline{x}_2^2 - \overline{x}_3^2 + 1 = 0\,.$$

Nach Vorlesung handelt es sich damit bei Q um ein **einschaliges Hyperboloid**. Eine Affinität, die Q auf $\tilde{Q}$ abbildet ist nach obiger Rechung

$$\varphi \,:\, \vec{\overline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{7}}{2} & \sqrt{7} \\ \frac{\sqrt{14}}{4} & \frac{\sqrt{14}}{2} & \frac{\sqrt{14}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{7\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{14}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}.$$