Satz: W. Trinks
Umbruch: S. Ritterbusch
Isometrie Druck: FS Mathematik

Diag.
Schmidt
A = B · C
Φ-Inv. UVR

Gruppenbeweis
⊕
seltsam

EW
Det

Rotkäppchen

Es war einmal ein Mädchen, dem wurde eineindeutig eine rote Kappe zugeordnet, wodurch es als Rotkäppchen definiert wurde. 'Kind', argumentierte die Mutter, 'werde kreativ, mathematisiere die kürzeste Verbindung des Weges zur Großmutter, analysiere aber nicht die Blumen am Wege, sondern formalisiere Deinen Weg in systematischer Ordnung.'

Rotkäppchen vereinigte einen Kuchen, eine Wurst und eine Flasche Wein zu einer Menge, hinterfragte nochmals den Weg und ging los. Im Walde schnitt ihr Weg den Weg eines Wolfes. Er diskutierte mit ihr über die Relevanz eines Blumenstraußes für die Großmutter und motivierte sie, einen geordneten, höchstens abzählbaren Strauß zu verknüpfen. Inzwischen machte der Wolf die Großmutter zu einer Teilmenge von sich. Als Rotkäppchen dann ankam, fragte sie: 'Großmutter, warum hast Du so große Augen?'

'Ich habe gerade mein Bafög erhalten!'

'Großmutter, warum hast Du so große Ohren?'

'Ich habe versucht, Prüfungsfragen durch die Tür zu erlauschen!'

'Großmutter, warum hast Du einen so großen Mund?'

'Ich habe versucht das Mensaessen zu schlucken!'

Daraufhin machte sich der Wolf zur konvexen Hülle von Rotkäppchen. Ein Jäger kam, sah eine leere Menge von Großmüttern im Haus und problematisierte die Frage, bis sie ihm transparent wurde. Dann nahm er sein Messer und machte aus dem Wolf eine Schnittmenge. Die im Wolf integrierten Personen wurden schleunigst von ihm subtrahiert. Zum Wolf wurde eine mächtige Menge von Steinen addiert. Er fiel in einen zylinderförmigen kartesischen Brunnen, bis seine Restmenge nicht mehr lebte.

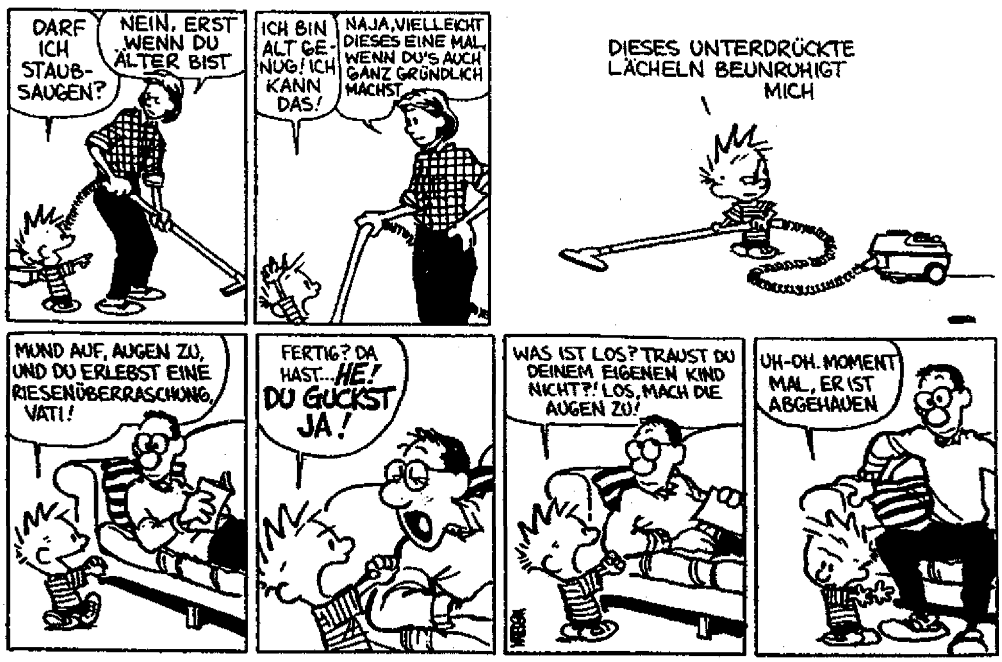
Ritz, H.: Die Geschichte vom Rotkäppchen. Muriverlag. 10. Aufl. 3501 Emstal, 1992

Aufgabe I-1 (4 Punkte).
Es seien $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $f : G \to G$ ein Endomorphismus von G. Zeigen Sie:
(a) Ist $f \circ f = \mathrm{id}_G$ und gibt es zu jedem $x \in G$ ein $y \in G$ mit $x = y^{-1} \cdot f(y)$, so gilt $f(x) = x^{-1}$ für alle $x \in G$.
(b) Ist $f(x) = x^{-1}$ für alle $x \in G$, so ist G abelsch.

Aufgabe I-2 (4 Punkte).
(a) Geben Sie eine Definition dafür, daß die Summe der Untervektorräume $U_1, \dots, U_n$ des Vektorraums V direkt ist.
(b) Geben Sie ein Beispiel dreier Untervektorräume U_1, U_2, U_3, bei denen $U_i \cap U_j = \{0\}$ ist für alle i, j mit $i \neq j$, aber die Summe $U_1 + U_2 + U_3$ nicht direkt.

Aufgabe I-3 (4 Punkte).
(a) Es seien V, W Vektorräume, $a_1, \dots, a_n \in V$ und $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:
Die Klassen $a_1 + \mathrm{Kern}(\Phi), \dots, a_n + \mathrm{Kern}(\Phi)$ im Faktorraum $V/\mathrm{Kern}(\Phi)$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\Phi(a_1), \dots, \Phi(a_n)$ linear abhängig sind.
(b) Geben Sie für $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 - x_3 + x_4 \\ x_3 - x_4 \end{pmatrix}$ und $a = \begin{pmatrix} \alpha - 3 \\ 1 \\ \alpha - 3 \\ -\alpha + 3 \end{pmatrix}$,
$b = \begin{pmatrix} -\beta \\ 0 \\ 2 \\ \beta \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} \beta - \alpha \\ \beta + \alpha \\ 2\beta \\ 3\alpha \end{pmatrix}$ alle Paare $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ an, für die
$a + \mathrm{Kern}(\Phi)$, $b + \mathrm{Kern}(\Phi)$, $c + \mathrm{Kern}(\Phi)$ linear unabhängig sind.

Aufgabe I-4 (4 Punkte).
Es sei V der Vektorraum der Polynomfunktionen des Grades ≤ 3 über dem Körper $\mathbb{R}$ und B die aus den Funktionen $t \mapsto t^i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ bestehende Basis von V.
(a) Es sei C das System der Funktionen $t \mapsto (t - i)^3$ $(i = 0, 1, 2, 3)$. Zeigen Sie, daß auch C eine Basis von V ist.
(b) Die Linearform $D \in V^*$ sei so definiert: Für $f \in V$ sei $D(f) = f'(-1)$ (Wert der Ableitung an der Stelle -1). Stellen Sie D sowohl als Linearkombination der Dualbasis von B als auch der von C dar.



Aufgabe I-1
(a) Aus $f \circ f = \mathrm{id}_G$ folgt unmittelbar, daß f bijektiv ist. Jetzt sei $x \in G$ gegeben. Nach Voraussetzung gibt es ein $y \in G$ mit $x = y^{-1} \cdot f(y)$. Daraus folgt $f(x) = f(y^{-1})f(f(y)) = f(y)^{-1}\mathrm{id}_G(y) = f(y)^{-1}y = (y^{-1}f(y))^{-1} = x^{-1}$.
(b) Seien $x, y \in G$ beliebig. Dann gilt einerseits $f(xy) = x^{-1}y^{-1}$ wegen der vorausgesetzten Eigenschaft von f, ein Endomorphismus zu sein, andererseits $f(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. Daher kommutieren jedenfalls x^{-1} und y^{-1}, also auch x und y.

Aufgabe I-2
(a) Da gibt es natürlich viele Möglichkeiten. Wir führen hier zwei an: 1. Für $m = 2, \ldots, n$ gilt $(U_1 + U_2 + \cdots + U_{m-1}) \cap U_m = \{0\}$. 2. In einer Summe $x = u_1 + \cdots + u_n$ mit $u_i \in U_i$ sind alle u_i durch x eindeutig bestimmt. (Unzureichend sind Definitionen, die mit der Dimension arbeiten, weil endliche Dimension nicht vorausgesetzt ist.)
(b) Man nehme zwei linear unabhängige Vektoren a, b und setze $U_1 = \langle a \rangle$, $U_2 = \langle b \rangle$, $U_3 = \langle a + b \rangle$. Je zwei dieser Vektorräume haben den Durchschnitt $\{0\}$, aber es ist $(U_1 + U_2) \cap U_3 \neq \{0\}$, die Bedingung der ersten Definition in (a) ist also nicht erfüllt.

Aufgabe I-3
(a) Wir bezeichnen die Klasse $x + \mathrm{Kern}(\Phi)$ mit $\bar{x}$. $\Phi(a_1), \ldots, \Phi(a_n)$ sind linear abhängig genau dann, wenn es nichttriviale $\beta_1, \ldots, \beta_n$ gibt mit $\sum_{i=1}^n \beta_i \Phi(a_i) = 0$. Die letzte Formel wird äquivalent umgeformt: $\Leftrightarrow \Phi(\sum \beta_i a_i) = 0 \Leftrightarrow \sum \beta_i a_i \in \mathrm{Kern}(\Phi) \Leftrightarrow \sum \beta_i \bar{a}_i = \bar{0}$.
(b) Nach dem ersten Teil der Aufgabe sind also die Paare (α, β) zu finden, für welche die Matrix $B = (\Phi(a), \Phi(b), \Phi(c))$ den Rang 3 hat. Man errechnet

$$B = \begin{pmatrix} 2\alpha - 7 & -\beta + 2 & 2\beta - 2\alpha \\ 7 - 2\alpha & -2 + \beta & -\beta + 4\alpha \\ 2\alpha - 6 & 2 - \beta & 2\beta - 3\alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2\alpha - 7 & -\beta + 2 & 2\beta - 2\alpha \\ 0 & 0 & \beta + 2\alpha \\ 1 & 0 & -\alpha \end{pmatrix},$$

Die rechte Matrix entsteht nach 2 Umformungsschritten und zeigt, daß der Rang den Wert 3 hat außer in den Fällen $\beta = 2$ und $\beta = -2\alpha$.

Aufgabe I-4
(a) Wir bezeichnen die Elemente von B mit $b_0, \ldots, b_3$ (in der angegebenen Reihenfolge), ähnlich bei C und später bei B^*, C^*. Dann ist $c_0 = b_3$, $c_1 = b_3 - 3b_2 + 3b_1 - b_0$, $c_2 = b_3 - 6b_2 + 12b_1 - 8b_0$, $c_3 = b_3 - 9b_2 + 27b_1 - 27b_0$. Das ergibt eine Übergangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \\ -8 & 12 & -6 & 1 \\ -27 & 27 & -9 & 1 \end{pmatrix},$$

von der man nach wenigen Umformungen die Invertierbarkeit erkennt. Also ist C eine Basis.
(b) B^* ist definiert durch $\langle b_i^* | b_j \rangle = \delta_{ij}$ und C^* ist definiert durch $\langle c_i^* | c_j \rangle = \delta_{ij}$. Es

$D = b_1^* - 2b_2^* + 3b_3^*$. Aus $D(c_0) = 3, D(c_1) = 12, D(c_2) = 27, D(c_3) = 48$ folgt ebenso $D = 3c_0^* + 12c_1^* + 27c_2^* + 48c_3^*$.

Aufgabe I-5
Angenommen, ein Eigenwert λ hat einen Betrag > 1. x sei ein Eigenvektor dazu. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N} : A^n x = \lambda^n x$. In dieser Gleichung ist die linke Seite beschränkt bei $n \to \infty$, die rechte nicht. (Wenn es sich etwa um eine $m \times m$-Matrix handelt und $x = {}^t(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ ist, kann kein Koeffizient der linken Seite größer werden als $c(|\xi_1| + \cdots + |\xi_m|)$.)

Aufgabe I-6
Die Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 1\,1\,1 \ldots & 1 & 1 \\ 1\,2\,2 \ldots & 2 & 2 \\ 1\,2\,3 \ldots & 3 & 3 \\ & \ldots & \\ 1\,2\,3 \ldots & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

Wenn man hier die erste Zeile von jeder anderen Zeile subtrahiert, ändert sich die Determinante nicht, und es entsteht in den Zeilen und Spalten mit den Nummern 2 bis n eine Matrix desselben Typs. Durch Laplace-Entwicklung nach der ersten Spalte und mit vollständiger Induktion erhält man also die Determinante 1.

Lösung 2. Teil

Aufgabe II-1
Es sei $J = S^{-1}AS$ die Jordansche Normalform der Matrix A. Aus $A^k = I$ folgt $J^k = (S^{-1}AS)^k = S^{-1}A^kS = I$. Daher muß jedes Jordankästchen K in J schon diagonal sein, denn für ein Kästchen der Art $K = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ hat die k-te Potenz an der Stelle (2,1) den Koeffizienten $k\lambda^{k-1}$, und das ist nie Null, denn es ist $\lambda \neq 0$, weil A invertierbar ist, und $k \neq 0$, weil $\mathbb{C}$ die Charakteristik 0 hat. — Da also J diagonal ist, ist A diagonalisierbar.
Eine andere Möglichkeit: Das Minimalpolynom von A ist ein Teiler des Polynoms $X^k - 1$, welches in $\mathbb{C}$ nur einfache Nullstellen hat (nämlich $e^{2\pi i \cdot l/k}, l = 0, \ldots, k-1$). Also haben alle Jordankästchen in der Normalform von A die Größe 1.

Es sei $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. Eine unnormierte Orthogonalbasis entsteht durch den Algorithmus

$b_1 := a_1$;

$b_2 := a_2 - \frac{\langle a_2|b_1\rangle}{\langle b_1|b_1\rangle} b_1 = {}^t(2,4,4,0)$; einfacher ist $b_2 = {}^t(1,2,2,0)$;

$b_3 := a_3 - \frac{\langle a_3|b_1\rangle}{\langle b_1|b_1\rangle} b_1 - \frac{\langle a_3|b_2\rangle}{\langle b_2|b_2\rangle} b_2 = {}^t(-2/3, 1/3, 0, 2/3)$; einfacher ist $b_3 = {}^t(-2,1,0,2)$;

$b_4 := a_4 - \frac{\langle a_4|b_1\rangle}{\langle b_1|b_1\rangle} b_1 - \frac{\langle a_4|b_2\rangle}{\langle b_2|b_2\rangle} b_2 - \frac{\langle a_4|b_3\rangle}{\langle b_3|b_3\rangle} b_3 = {}^t(0, -2/3, 2/3, 1/3)$; einfacher ist $b_4 = {}^t(0,-2,2,1)$.

Orthogonal ist dann die Matrix $B = 1/3 \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4)$, da die b_i alle die Norm 3 haben; ihre Spalten sind die gesuchte Orthonormalbasis.

(b) Die Übergangsmatrix zwischen den a_i und den b_j ist nach dem Algorithmus dreieckig. Man erhält $C = B^{-1}A = B^{\mathsf{T}}A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe II-3

Da Φ selbstadjungiert ist, gibt es eine Orthonormalbasis von V aus Eigenvektoren von Φ . Ein Unterraum U ist genau dann Φ -invariant, wenn er eine Basis aus Eigenvektoren von Φ hat. Wenn Φ nun n verschiedene Eigenwerte hat, ist jeder Eigenraum eindimensional, und $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ bedeutet, daß die Mengen der Eigenwerte von $\Phi|_{U_1}$ und $\Phi|_{U_2}$ disjunkt sind. Dann sind U_1 und U_2 auch orthogonal zueinander, denn Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal. Hat aber Φ weniger als n Eigenwerte, muß es einen Eigenraum E mit $\dim(E) > 1$ geben. Man wähle zwei linear unabhängige, aber nicht orthogonale Vektoren $u_1, u_2 \in E$ aus, dann sind $U_1 := \langle u_1 \rangle, U_2 := \langle u_2 \rangle$ zwei Φ -invariante Unterräume mit $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, die nicht orthogonal sind.

Aufgabe II-4

Die komplexen Eigenwerte einer Isometrie haben den Betrag 1 . Ihre Realteile sind die Eigenwerte der Matrix

$$B = \frac{1}{2}(A + A^{\mathsf{T}}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 & 2-\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{3} & 0 & 2-\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} & 0 & 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} & 0 & 2+\sqrt{3} \end{pmatrix} .$$

Das charakteristische Polynom von $4B$ (damit man vorerst nennerfrei rechnen kann!) ist — man vertauscht Zeilen und Spalten Nr. 2 und 3 und wendet die Kästchenregel an — $(\lambda^2 - 2(2+\sqrt{3})\lambda + 8\sqrt{3})^2$ mit den jeweils doppelten Nullstellen 4 und $2\sqrt{3}$. Die Eigenwerte von B sind also 1 und $\sqrt{3}/2$. Daher ist 1 auch Eigenwert von A , und die anderen Eigenwerte von A sind $(\sqrt{3} \pm \mathrm{i})/2$. Die Normalform von A ist also

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} .$$

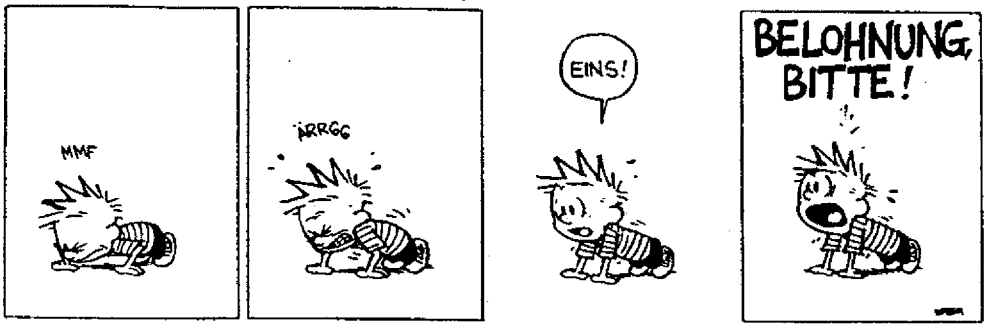
des Eigenraums zu 1 durch Lösen des LGSs $(A - I)x = 0$, was sich ohne Gaußalgorithmus durch Raten erledigen läßt: $x_1 = {}^t(1,0,1,0)/\sqrt{2}$, $x_2 = {}^t(0,1,0,1)/\sqrt{2}$, und da die weiteren Basisvektoren zu diesen orthogonal sein müssen, $x_3 = {}^t(1,0,-1,0)/\sqrt{2}$, $x_4 = {}^t(0,1,0,-1)/\sqrt{2}$. Jetzt ist durch Einsetzen zu prüfen, ob man wegen des Vorzeichens in $\tilde{A}$ noch x_3 mit x_4 vertauschen muß. In der Tat ist $x_3^{\mathrm{T}} A x_4$ positiv. Man kann also $T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ nehmen.

Aufgabe II-5
(a) $\Phi_2(\Psi(x)) = \Psi(\Phi_1(x)) = \Psi(\lambda x) = \lambda\Psi(x)$.
(b) Da Φ_1 normal ist, gibt es eine Orthonormalbasis B von V aus Eigenvektoren zu Φ_1. Ist x ein Eigenvektor von Φ_1 zum Eigenwert λ, so ist x auch Eigenvektor zu Φ_1^* zum Eigenwert $\overline{\lambda}$ nach dem Spektralsatz. Die behauptete Gleichung zwischen linearen Abbildungen wird bewiesen sein, wenn man die Gleichheit der Werte beider Seiten nach Einsetzen der Elemente von B gezeigt hat. Also: $\Psi(\Phi_1^*(x)) = \Psi(\overline{\lambda}x) = \overline{\lambda}\Psi(x)$, daraus folgt nach Teil (a): $\Phi_2(\Psi(x)) = \lambda\Psi(x)$, und jetzt wieder mit dem Spektralsatz für Φ_2: $\Phi_2^*(\Psi(x)) = \overline{\lambda}\Psi(x)$.

Aufgabe II-6
Wir setzen $a = \overrightarrow{P_1Q_1}$, $b = \overrightarrow{P_2Q_2}$, $c = \overrightarrow{P_1P_2}$ und schreiben ferner das Skalarprodukt einfacher $xy := \langle x|y\rangle$.
Wenn P_1, P_2 die Fußpunkte des Lotes sind, gilt $d = \|c\|$, also $d^2 = cc$, und $ac = bc = 0$. Andererseits ist $G(a,b) = \det\begin{pmatrix} aa & ab \\ ba & bb \end{pmatrix}$ und $G(a,c,b) = G(a,b,c) = \det\begin{pmatrix} aa & ab & ac \\ ba & bb & bc \\ ca & cb & cc \end{pmatrix} =$
$\det\begin{pmatrix} aa & ab & 0 \\ ba & bb & 0 \\ 0 & 0 & cc \end{pmatrix}$. Die behauptete Formel ist also in diesem Fall richtig. Im der allgemeinen Situation hat man anstelle von c zu verwenden $c' = c + \lambda a + \mu b$. Dann wird $ac' = ac + \lambda aa + \mu ab = \lambda aa + \mu ab$, $bc' = bc + \lambda ba + \mu bb = \lambda ba + \mu bb$ und $c'c' = (c + \lambda a + \mu b)(c + \lambda a + \mu b) = cc + \lambda^2 aa + 2\lambda\mu ab + \mu^2 bb$. Das zeigt, daß die $G(a,b,c')$ definierende Matrix aus der Matrix für $G(a,b,c)$ so entsteht: Man addiert zur letzten Spalte das λ-fache der ersten und das μ-fache der zweiten Spalte, und dann macht man dasselbe mit den Zeilen. Solche Umformungen ändern die Determinante nicht. Daher ist $G(a,b,c') = G(a,b,c)$, und die Formel gilt allgemein.

Für die quadratische reelle Matrix A gelte: Es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß der Betrag aller Koeffizienten aller Matrizen A^n $(n \in \mathbb{N})$ höchstens c ist.
Zeigen Sie: Dann haben alle Eigenwerte von A höchstens den Betrag 1.

Aufgabe I-6 (4 Punkte).
Es sei $A = (\alpha_{ij})$ mit $\alpha_{ij} = \begin{Bmatrix} i \text{ für } i < j \\ j \text{ für } i \geq j \end{Bmatrix}$ $(1 \leq i, j \leq n)$. Berechnen Sie $\det(A)$.



Aufgaben 2. Teil

Aufgabe II-1 (4 Punkte).
Sei A eine komplexe $n \times n$ -Matrix mit der Eigenschaft, daß eine natürliche Zahl $k \geq 1$ existiert mit $A^k = I$ (Einheitsmatrix). Zeigen Sie, daß A diagonalisierbar ist.

Aufgabe II-2 (4 Punkte).
Gegeben sei die reelle 4×4 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Wenden Sie auf die Spalten von A das Orthogonalisierungsverfahren von E. Schmidt an, um eine Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^4$ zu berechnen.
(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix B und eine obere Dreiecksmatrix C (d.h. für $C = (\gamma_{ij})$ gilt $\gamma_{ij} = 0$ für $i > j$) mit $A = B \cdot C$.

Aufgabe II-3 (4 Punkte).
Es seien V ein n -dimensionaler euklidischer Vektorraum und Φ ein selbstadjungierter Endomorphismus von V.
Zeigen Sie: Φ hat genau dann n verschiedene Eigenwerte, wenn je zwei Φ -invariante Untervektorräume U_1 und U_2 von V mit $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ orthogonal sind.

Im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ (mit Standardskalarprodukt) sei bzgl. einer Orthonormalbasis $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ eine Isometrie durch ihre Abbildungsmatrix

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & 1 & 2-\sqrt{3} & -1 \\ -1 & 2+\sqrt{3} & 1 & 2-\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} & -1 & 2+\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 2-\sqrt{3} & -1 & 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

gegeben.
Bestimmen Sie die Normalform $\tilde{A}$ dieser Isometrie und eine orthogonale Matrix T, die $\tilde{A} = T^{\top} A T$ erfüllt.

Aufgabe II-5 (4 Punkte).
Es seien V ein Vektorraum und $\Phi_1, \Phi_2, \Psi \in \operatorname{End}(V)$ mit $\Psi \circ \Phi_1 = \Phi_2 \circ \Psi$. Zeigen Sie:
(a) Ist x Eigenvektor von Φ_1 zum Eigenwert λ, so ist entweder $\Psi(x) = 0$, oder $\Psi(x)$ ist ein Eigenvektor von Φ_2 zum Eigenwert λ.
(b) Es seien zusätzlich V endlichdimensional und unitär und Φ_1, Φ_2 normal sowie Φ_1^* und Φ_2^* die zugehörigen adjungierten Endomorphismen. Dann gilt $\Psi \circ \Phi_1^* = \Phi_2^* \circ \Psi$.

Aufgabe II-6 (4 Punkte).
Ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$, so definiert man für $a_1, \ldots, a_n \in V$ die *Gramsche Determinante* als $G(a_1, \ldots, a_n) := \det(\langle a_i | a_j \rangle)_{i,j=1,\ldots,n}$.
Nun seien g_1, g_2 zwei nicht parallele Geraden im euklidischen $\mathbb{R}^3$ und P_1, Q_1 zwei verschiedene Punkte auf g_1 sowie P_2, Q_2 zwei verschiedene Punkte auf g_2.
Zeigen Sie: Für den Abstand d der beiden Geraden gilt

$$d^2 = \frac{G(\overrightarrow{P_1Q_1}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2Q_2})}{G(\overrightarrow{P_1Q_1}, \overrightarrow{P_2Q_2})}.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung zunächst für den Fall, daß P_1, P_2 die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes auf g_1, g_2 sind.

Statistik

Fachrichtung	bestanden	nicht bestanden	Teilnehmer	Durchfallquote
Mathematik, insgesamt	49	18	67	26.9 %
Mathematik, Diplom	14	3	17	17.6 %
Wirtschaftsmathematik	14	5	19	26.3 %
Technomathematik	4	4	8	50.0 %
Lehramt	8	6	14	42.9 %
Physik	4	0	4	0.0 %
Informatik, Zusatzprüfung	5	0	5	0.0 %
Informatik	60	27	87	31.0 %
gesamt	109	45	154	29.2 %