I.1 (4 Punkte)
Es sei $A := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}\}$.

a) Zeigen Sie, dass A bezüglich der Komposition $\circ$ von Abbildungen keine Gruppe ist.

b) Geben Sie eine unendliche Teilmenge G von A an, sodass $(G, \circ)$ eine Gruppe ist (Begründung!).

c) Gibt es eine echte nichttriviale kommutative Untergruppe U von $(G, \circ)$? Geben Sie gegebenenfalls eine solche an.

Lösung:
a) In $(A, \circ)$ ist die Identität id rechts- und linksneutral.
Angenommen A sei eine Gruppe. Dann gäbe es zur Nullabbildung $f \in A$ (es ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$) eine Rechtsinverse $g \in A$ mit $f \circ g = id$. Es ist aber $0 = f \circ g(5) \neq id(5) = 5$, also $f \circ g \neq id$.

Möglichkeit 1:
b) $G_1 := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b \text{ mit } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\}$ ist die Menge der Affinitäten von $\mathbb{R}$, also eine unendliche Gruppe.
(Bemerkung: Man kann die Gruppeneigenschaften auch nachprüfen: Die Verknüpfung von Abbildungen ist immer assoziativ, das neutrale Element ist id mit $id(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und zu f mit $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ ist das inverse Element gegeben durch $\overline{f}$ mit $\overline{f}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$.)
c) $H_1 := \{f_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f_b(x) = x + b \text{ mit } b \in \mathbb{R}\}$ ist eine Teilmenge von G_1, die Untergruppe der Translationen von $\mathbb{R}$. Sie ist zu $(\mathbb{R}, +)$ isomorph und damit kommutativ.
(Bemerkung: Auch hier kann mit dem Untergruppenkriterium schnell gezeigt werden, dass H_1 eine Untergruppe von G_1 ist. Die Kommutativität von H_1 ist ebenfalls direkt zu sehen.)

Möglichkeit 2:
b) $G_2 := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax \text{ mit } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} = \mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$ ist isomorph zu $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ und damit eine unendlich kommutative Gruppe.
(Bemerkung: Auch hier sind die Gruppeneigenschaften schnell direkt gezeigt: Die Verkettung ist immer assoziativ, das neutrale Element ist wiederum id und gehört zu G_2. Das inverse Element zu f mit $f(x) = ax$, $a \neq 0$ ist gegeben durch $\overline{f}$ mit $\overline{f}(x) = \frac{1}{a}x$.)
c) $H_2 := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax \text{ mit } a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\}$ ist eine (zu $(\mathbb{Q}, \cdot)$ isomorphe) Untergruppe von G_2 und wie G_2 kommutativ.
(Bemerkung: Auch hier kann mit dem Untergruppenkriterium sofort gezeigt werden, dass H_2 eine Untergrupppe von G_2 ist. Weil G_2 kommutativ ist, gilt dies natürlich auch für H_2.)

I.2 (4 Punkte)
Es sei $V = \mathbb{C}$ aufgefasst als Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit der Basis $B := \{1, i\}$. Für eine komplexe Zahl $c = a + ib$ sei die Abbildung

$$\Phi_c : \begin{cases} V & \to & V \\ z & \mapsto & \Phi_c(z) := c \cdot z \end{cases}$$

gegeben, wobei die Multiplikation in $\mathbb{C}$ verwendet wird.

a) Zeigen Sie, dass für alle $c \in \mathbb{C}$ die Abbildung Φ_c ein Endomorphismus des reellen Vektorraums V ist.

b) Bestimmen Sie für $c = i$ die Abbildungsmatrix von Φ_c bezüglich B.

c) Geben Sie alle reellen 2×2-Matrizen $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ an, die Abbildungsmatrizen einer linearen Abbildung Φ_c, $c \in \mathbb{C}$, bezüglich der Basis B sind.

Lösung:
a) Für jede komplexe Zahl $c \in \mathbb{C}$ ist die Abbildung Φ_c eine Abbildung von V nach V. Außerdem gilt für alle Vektoren $z, z_1, z_2 \in V$ und alle Skalare $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Phi_c(t\,z) &= c \cdot t\,z = t(c \cdot z) = t\,\Phi_c(z) \\ \Phi_c(z_1 + z_2) &= c \cdot (z_1 + z_2) = c \cdot z_1 + c \cdot z_2 = \Phi_c(z_1) + \Phi_c(z_2)\ , \end{aligned}$$

d.h. die Abbildung Φ_c ist linear über dem Körper $\mathbb{R}$ und damit ein Endomorphismus des reellen Vektorraums V.
b) Es ist $\Phi_i(1) = i \cdot 1 = i = 0 \cdot 1 + 1 \cdot i$ und $\Phi_i(i) = i \cdot i = -1 = -1 \cdot 1 + 0 \cdot i$. Damit lautet die Abbildungsmatrix A_i von Φ_i bezüglich der Basis B

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Mit $c = a + ib$ gilt $\Phi_c(1) = (a + ib) \cdot 1 = a \cdot 1 + b \cdot i$ und $\Phi_c(i) = (a + ib) \cdot i = (-b) \cdot 1 + a \cdot i$. Damit ergibt sich die Abbildungsmatrix A_c von Φ_c bezüglich B

$$A_c = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ ist also genau dann Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung Φ_c, $c \in \mathbb{C}$, wenn gilt

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} \quad \text{und} \qquad \alpha_{12} = -\alpha_{21}\,.$$

I.3 (4 Punkte)
Es sei A eine reelle $p{\times}n$-Matrix mit $p \geq 1$ und $n \geq 1$. Kreuzen Sie an, ob die folgenden Schlüsse RICHTIG oder FALSCH sind. Beweise sind dabei nicht verlangt.

		RICHTIG	FALSCH
a)	Ist das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p$ eindeutig lösbar, so ist auch $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ eindeutig lösbar.	☐	☐
b)	Ist das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ eindeutig lösbar, so ist auch $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p$ eindeutig lösbar.	☐	☐
c)	Ist das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p$ lösbar, so ist $p = n$ und A ist regulär.	☐	☐
d)	Ist $p = n$ und A regulär, so ist das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p$ lösbar.	☐	☐
e)	Ist das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p$ eindeutig lösbar, so ist $p = n$ und A ist regulär.	☐	☐
f)	Ist $p = n$ und A regulär, so ist das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p$ eindeutig lösbar.	☐	☐
g)	Existieren für ein $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p \backslash \{\boldsymbol{o}\}$ zwei verschiedene Lösungen des Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, dann hat auch $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ zwei verschiedene Lösungen.	☐	☐
h)	Hat das homogene Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ zwei verschiedene Lösungen, so gibt es ein $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p \backslash \{\boldsymbol{o}\}$, sodass das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ zwei verschiedene Lösungen hat.	☐	☐

Hinweis zur Punktevergabe: Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen. Nichtangekreuzte Aufgabenteile werden nicht bewertet. Ist die Summe aller Punkte negativ, so wird die Aufgabe mit Null Punkten bewertet. Ansonsten ist die Summe gleich der Punktezahl.

Lösung:

		RICHTIG	FALSCH
a)	Ist das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p$ eindeutig lösbar, so ist auch $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ eindeutig lösbar.	☒	☐
b)	Ist das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ eindeutig lösbar, so ist auch $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p$ eindeutig lösbar.	☐	☒
c)	Ist das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p$ lösbar, so ist $p = n$ und A ist regulär.	☐	☒
d)	Ist $p = n$ und A regulär, so ist das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p$ lösbar.	☒	☐
e)	Ist das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p$ eindeutig lösbar, so ist $p = n$ und A ist regulär.	☒	☐
f)	Ist $p = n$ und A regulär, so ist das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p$ eindeutig lösbar.	☒	☐
g)	Existieren für ein $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p \backslash \{\boldsymbol{o}\}$ zwei verschiedene Lösungen des Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, dann hat auch $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ zwei verschiedene Lösungen.	☒	☐
h)	Hat das homogene Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ zwei verschiedene Lösungen, so gibt es ein $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^p \backslash \{\boldsymbol{o}\}$, sodass das Gleichungssystem $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ zwei verschiedene Lösungen hat.	☐	☒

I.4 (4 Punkte)

a) Es seien V ein n-dimensionaler Vektorraum über K und $B = \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ eine Basis von V.

Was ist der Dualraum V^* von V und was versteht man unter der Dualbasis B^* zu B?

b) Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ seien B die Standardbasis und B^* die zugehörige Dualbasis. Für festes $a \in \mathbb{R}$ sei die Menge $C_a = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3\}$ gegeben durch

$$\boldsymbol{c}_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a(a+1) \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{c}_2 := \begin{pmatrix} a-1 \\ a \\ a \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{c}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Für welche a ist C_a eine Basis von V? Für jedes dieser a sei C_a^* die Dualbasis zu C_a. Stellen Sie die Vektoren von C_a^* als Linearkombination der Vektoren von B^* dar.

Lösung:

a) Die Menge der linearen Abbildungen $\Phi : V \to K$ bildet (mit der punktweise definierten Addition und K-Multiplikation) einen Vektorraum über K, den Dualraum V^* von V.
Ist $B = \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ eine Basis von V, so heißt eine Basis $B^* = \{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ von V^* Dualbasis von B, wenn für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt: $\Phi_i(b_j) = \delta_{ij}$ (Kroneckersymbol).
b) C_a ist Basis $\iff$

$$0 \neq \begin{vmatrix} 0 & a & a(a+1) \\ a-1 & a & a \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & a(a+1) \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a \iff a \neq 0.$$

Gegeben: $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ und zugehörige Dualbasis $B^* = \{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$.
Für $a \neq 0$ ist $C_a = \{\boldsymbol{c}_l = \sum_{j=1}^{3} \gamma_{lj} \boldsymbol{b}_j | l = 1, 2, 3\}$ Basis.

Gesucht: Dualbasis $C_a^* = \{\Psi_k = \sum_{i=1}^{3} \lambda_{ik} \Phi_i | k = 1, 2, 3\}$ von C_a.

Ansatz: Für $k, l \in \{1, 2, 3\}$ gilt

$$\delta_{kl} \overset{!}{=} \Psi_k(\boldsymbol{c}_l) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_{ik} \Phi_i(\sum_{j=1}^{3} \gamma_{lj} \boldsymbol{b}_j) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ik} \gamma_{lj} \underbrace{\Phi_i(\boldsymbol{b}_j)}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_{ik} \gamma_{li}$$

$$\iff \quad (\lambda_{ik})_{i,k \in \{1,2,3\}} \quad \text{ist die inverse Matrix von} \quad (\gamma_{li})_{l,i \in \{1,2,3\}}.$$

Für die inverse Matrix ergibt sich:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & a & a(a+1) & 1 & 0 & 0 \\ a-1 & a & a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & a & a(a+1) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 1 & 1-a \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & a & 1 & -a & a(a-1) \\ 0 & 1 & a & 0 & 1 & 1-a \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & a & 1 & -a & a(a-1) \\ 0 & 1 & 0 & -1 & a+1 & (1-a)(a+1) \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & a & 1 & -a & a(a-1) \\ 0 & 1 & 0 & -1 & a+1 & 1-a^2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1-a & a^2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -(a+1) & a^2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & a+1 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} & -1 & a-1 \end{array}\right)$$

Damit lautet das Ergebnis:

$$\begin{array}{rcrlrlrl} \Psi_1 & = & & \Phi_1 & - & \Phi_2 & + \frac{1}{a} & \Phi_3 \\ \Psi_2 & = & -(a+1) & \Phi_1 & + (a+1) & \Phi_2 & - & \Phi_3 \\ \Psi_3 & = & a^2 & \Phi_1 & + (1-a^2) & \Phi_2 & + (a-1) & \Phi_3 \end{array}$$

I.5 (4 Punkte)
Im Vektorraum $K^{n\times n}$ der quadratischen $n\times n$-Matrizen mit Einträgen aus dem Körper K bilden die *Elementarmatrizen* E_{ij} $(1 \le i,j \le n)$, die genau an der Stelle (i,j) eine 1 und ansonsten nur 0 als Einträge haben, eine Basis.
In $K^{n\times n}$ seien zwei Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ fest gegeben. Damit wird die lineare Abbildung

$$\Phi : \quad \begin{cases} K^{n\times n} & \to \quad K^{n\times n} \\ \quad X & \mapsto \quad AXB \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie:

a) Sind A und B Diagonalmatrizen, so bilden die Elementarmatrizen eine Basis aus Eigenvektoren von Φ.

b) Sind A und B diagonalisierbar, so ist auch Φ diagonalisierbar.

Lösung:
a) Seien

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix}.$$

Weil für alle $i,j \in \{1,\ldots,n\}$

$$\Phi(E_{ij}) = AE_{ij}B = \alpha_i\beta_j E_{ij}$$

gilt, ist die aus den Elementarmatrizen bestehende Basis B eine Eigenbasis und damit Φ diagonalisierbar.
b)

$$A \text{ ist diagonalisierbar} \iff \exists \text{ reguläres } T \in K^{n\times n} : T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \overline{\alpha}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\alpha}_n \end{pmatrix} =: \overline{A},$$

$$B \text{ ist diagonalisierbar} \iff \exists \text{ reguläres } S \in K^{n\times n} : S^{-1}BS = \begin{pmatrix} \overline{\beta}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\beta}_n \end{pmatrix} =: \overline{B}.$$

Nach Teil a) gilt für die Elementarmatrizen

$$\overline{A}E_{ij}\overline{B} = \overline{\alpha}_i\overline{\beta}_j E_{ij} \quad i,j \in \{1,\ldots n\}.$$

Dies umgeformt ergibt

$$\begin{aligned} T^{-1}ATE_{ij}S^{-1}BS &= \overline{\alpha}_i\overline{\beta}_j E_{ij} \text{ beziehungsweise} \\ ATE_{ij}S^{-1}B &= \overline{\alpha}_i\overline{\beta}_j TE_{ij}S^{-1} \quad \text{für } i,j \in \{1,\ldots n\}. \end{aligned}$$

Damit wären die n^2 Vektoren $F_{ij} := TE_{ij}S^{-1}$ $(i,j \in \{1,\ldots,n\})$ Eigenvektoren, falls $F_{ij} \neq O$ gilt. Wir zeigen, dass die n^2 Vektoren F_{ij} sogar linear unabhängig sind:

$$O = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}F_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}TE_{ij}S^{-1} = T(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}E_{ij})S^{-1}$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}E_{ij} = T^{-1}OS = O.$$

Da die Vektoren E_{ij} l.u. sind, folgt daraus für alle $i,j \in \{1,\ldots,n\}$: $\lambda_{ij} = 0$, also die lineare Unabhängigkeit der F_{ij}. Daraus folgt $F_{ij} \neq O$, sodass die n^2 Vektoren F_{ij} Eigenvektoren sind. Aus ihrer linearen Unabhängigkeit und aus $\dim K^{n\times n} = n^2$ ergibt sich, dass C Eigenbasis zu Φ von $K^{n\times n}$ und Φ diagonalisierbar ist.

I.6 (4 Punkte)
Es seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ und $B = (b_{ij})$ die $n \times n$-Matrix mit

$$b_{ij} = \begin{cases} a_i & \text{für} \quad i \le j \\ a_j & \text{für} \quad i > j \end{cases} .$$

Berechnen Sie die Determinante von B.

Lösung:
Es ist

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & \cdots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$\begin{aligned}
\det B &= \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & \cdots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_n \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2 - a_1 & \cdots & \cdots & a_2 - a_1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & \cdots & a_3 - a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & \cdots & a_n - a_1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \end{matrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2 - a_1 & \cdots & \cdots & a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & a_3 - a_2 & \cdots & \cdots & a_3 - a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_3 - a_2 & \cdots & \cdots & a_n - a_2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (-1) \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \end{matrix} \\
&= \cdots \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2 - a_1 & \cdots & \cdots & a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & a_3 - a_2 & \cdots & \cdots & a_3 - a_2 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n - a_{n-1} \end{vmatrix} \\
&= a_1 \cdot (a_2 - a_1) \cdot (a_3 - a_2) \cdots (a_n - a_{n-1}) = a_1 \cdot \prod_{i=2}^{n} (a_i - a_{i-1}).
\end{aligned}$$

II.1 (4 Punkte)
Gegeben sei eine komplexe $n \times n$-Matrix A ($n \geq 1$) mit ausschließlich reellen Eigenwerten. Zeigen Sie:

a) Ist $\lambda = 1$ einziger Eigenwert von A und ist der zugehörige Eigenraum eindimensional, so sind A und A^2 ähnlich.

b) Ist A regulär und sind A und A^2 ähnlich, so ist 1 einziger Eigenwert von A.

Lösung:
a) $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sind ähnlich. $\Longleftrightarrow$ Es gibt eine reguläre Matrix S mit $S^{-1}AS = B$. $\Longleftrightarrow$ Die Jordansche Normalform von A und B sind gleich: JNF(A)=JNF(B).
Hat A nur den Eigenwert 1 und ist der zugehörige Eigenraum eindimensional, so lautet das charakteristische Polynom $p_A = (1 - X)^n$ und die Jordannormalform von A hat nur ein Jordankästchen:

$$\mathrm{JNF}(A) = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Weiter gilt

$$S^{-1}A^2S = (S^{-1}AS)(S^{-1}AS) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet das charakteristische Polynom von $S^{-1}AS$ ebenfalls $(1 - X)^n$ und die Dimensionsion des Eigenraums zum Eigenwert 1 ergibt sich wegen $\mathrm{Rang}(S^{-1}AS - E_n) = n - 1$ zu 1. Also gilt $\mathrm{JNF}(A^2) = \mathrm{JNF}(S^{-1}A^2S) = \mathrm{JNF}(A)$, weshalb A und A^2 ähnlich sind.

b) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert von A, so gilt zunächst $\lambda \neq 0$, da A regulär ist. Ist $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ ein zugehöriger Eigenvektor, so folgt aus $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ unmittelbar $A^2\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}$. Also ist λ^2 Eigenwert von A^2, und da A und A^2 dieselben Eigenwerte haben, auch Eigenwert von A. Analog folgert man, dass dann $\lambda, \lambda^2, \lambda^4, \lambda^8, \ldots$ Eigenwerte von A sind. Daraus wiederum ergibt sich $\lambda = \pm 1$, da ansonsten die Matrix A unendlich viele Eigenwerte hätte.
Es bleibt zu zeigen, dass -1 unter den genannten Voraussetzungen nicht als Eigenwert auftreten kann.
Zunächst ist (siehe oben) jeder Eigenvektor $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ von A zum Eigenwert 1 auch Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A^2, also gilt für die Eigenräume $K_1(A) \subset K_1(A^2)$. Weil A und A^2 ähnlich sind, gilt $\dim K_1(A) = \dim K_1(A^2)$, woraus $K_1(A) = K_1(A^2)$ folgt.
Nimmt man nun an, es gibt einen Eigenvektor $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{o}$ zum Eigenwert -1 von A, so ist $\boldsymbol{y}$ auch Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A^2. Also gilt $\boldsymbol{y} \in K_1(A^2)$, aber $\boldsymbol{y} \notin K_1(A)$ und damit $K_1(A) \neq K_1(A^2)$ im Gegensatz zu oben. Also kann es keinen Eigenvektor von A zum Eigenwert -1 geben und $+1$ ist der einzige Eigenwert von A.

II.2 (4 Punkte)
Für $n \geq 1$ sei V der reelle Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner als n.

a) Zeigen Sie: Für n vorgegebene verschiedene reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ ist
$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i)$$
ein Skalarprodukt auf V.

b) Bestimmen Sie für $n = 3$ und $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ eine Orthonormalbasis von V bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Lösung:

a) Für $f, g, h \in V$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)f(x_i) = \langle g, f\rangle$$
und
$$\langle af + bg, h\rangle = a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)h(x_i) \ + \ b\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)h(x_i) = a\langle f, h\rangle + b\langle g, h\rangle,$$
also ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Es gilt weiter
$$\langle f, f\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)^2 \geq 0$$
und aus $\langle f, f\rangle = 0$ folgt $f(x_i) = 0$ für $i = 1, ..., n$ und daher $f = 0$, weil f eine Polynomfunktion mit Grad $f < n$ und n verschiedenen Nullstellen ist. Also ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv definit und damit ein Skalarprodukt.

b) Allgemein gilt: Nach dem Orthogonalisierungsverfahren von E.Schmidt bilden $p_0, ..., p_{n-1}$ eine orthogonale Basis für
$$p_0 := e_0, \quad p_i(x) := e_i(x) - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{\langle e_i, p_k\rangle}{\langle p_k, p_k\rangle} p_k(x) \quad (i = 1, ..., n-1).$$
Dabei ist $\{e_0, ..., e_{n-1}\}$ mit $e_i(x) = x^i$ die Standardbasis von V. Für $n = 3$ und $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ gilt also
$$\begin{aligned}
p_0(x) &= e_0(x) = 1\,,\\
p_1(x) &= e_1(x) - \frac{\langle e_1, p_0\rangle}{\langle p_0, p_0\rangle} p_0(x) = x - \frac{\frac{1}{3}(-1+0+1)}{\frac{1}{3}(1+1+1)} \cdot 1 = x\,,\\
p_2(x) &= e_2(x) - \frac{\frac{1}{3}(1+0+1)}{1} \cdot 1 - \frac{\frac{1}{3}(-1+0+1)}{\frac{1}{3}(1+0+1)} \cdot x = x^2 - \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$
Daher ist $\{q_0, q_1, q_2\}$ mit $q_i = \frac{p_i}{||p_i||}$ eine Orthonormalbasis von V bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Mit
$$\begin{aligned}
||p_1|| &= \sqrt{\langle p_1, p_1\rangle} = \sqrt{\frac{2}{3}}\\
||p_2|| &= \sqrt{\langle p_2, p_2\rangle} = \sqrt{\frac{1}{3}(\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9})} = \sqrt{\frac{6}{27}} = \sqrt{\frac{2}{9}}
\end{aligned}$$
ergibt sich also
$$q_0(x) = 1, \quad q_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x, \quad q_2(x) = \sqrt{\frac{9}{2}}\, x^2 - \sqrt{2}.$$

II.3 (4 Punkte)
Es seien Φ ein bijektiver Endomorphismus eines n-dimensionalen euklidischen Vektorraums V und Φ^* die Adjungierte zu Φ. Zeigen Sie:

a) Die beiden Abbildungen $\Phi^* \circ \Phi$ und $\Phi \circ \Phi^*$ sind selbstadjungiert und haben nur positive Eigenwerte.

b) $\Phi^* \circ \Phi$ und $\Phi \circ \Phi^*$ haben dieselben Eigenwerte.

c) Es gibt eine Isometrie Ψ von V mit $\Psi^{-1} \circ \Phi^* \circ \Phi \circ \Psi = \Phi \circ \Phi^*$.

Lösung:
a) Für Endomorphismen Φ, Ψ gilt $(\Phi \circ \Psi)^* = \Psi^* \circ \Phi^*$ und $(\Phi^*)^* = \Phi$. Daraus ergibt sich in diesem Fall

$$(\Phi^* \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \Phi^{**} = \Phi^* \circ \Phi$$

und

$$(\Phi \circ \Phi^*)^* = \Phi^{**} \circ \Phi^* = \Phi \circ \Phi^*.$$

Also ist sowohl $\Phi \circ \Phi^*$ als auch $\Phi^* \circ \Phi$ selbstadjungiert.
Sei nun λ ein Eigenwert zum Eigenvektor $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ von $\Phi \circ \Phi^*$. Da Φ bijektiv ist, gilt dies auch für Φ^*. Also ist $\Phi^*(\boldsymbol{v}) \neq \boldsymbol{o}$ und es folgt:

$$0 < \langle \Phi^*(\boldsymbol{v}), \Phi^*(\boldsymbol{v}) \rangle = \langle \Phi \circ \Phi^*(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle.$$

Da weiter $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle > 0$ gilt, ist $\lambda > 0$.
Analog gilt für einen Eigenwert λ zum Eigenvektor $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ von $\Phi^* \circ \Phi$

$$0 < \langle \Phi(\boldsymbol{v}), \Phi(\boldsymbol{v}) \rangle = \langle \Phi^* \circ \Phi(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle.$$

Da wie oben $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle > 0$ gilt, ist $\lambda > 0$.

b) Sei λ ein Eigenwert zum Eigenvektor $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ von $\Phi \circ \Phi^*$. Dann ist $\Phi^*(\boldsymbol{v}) \neq \boldsymbol{o}$ und es gilt

$$\Phi^* \circ \Phi(\Phi^*(\boldsymbol{v})) = \Phi^*(\Phi \circ \Phi^*(\boldsymbol{v})) = \Phi^*(\lambda \boldsymbol{v}) = \lambda \Phi^*(\boldsymbol{v}).$$

Also ist λ auch Eigenwert von $\Phi^* \circ \Phi$ mit Eigenvektor $\Phi^*(\boldsymbol{v})$.
Sei andererseits λ ein Eigenwert zum Eigenvektor $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ von $\Phi^* \circ \Phi$. Dann ist $\Phi(\boldsymbol{v}) \neq \boldsymbol{o}$ und es gilt

$$\Phi \circ \Phi^*(\Phi(\boldsymbol{v})) = \Phi(\Phi^* \circ \Phi(\boldsymbol{v})) = \Phi(\lambda \boldsymbol{v}) = \lambda \Phi(\boldsymbol{v}).$$

Also ist λ auch Eigenwert von $\Phi \circ \Phi^*$ mit Eigenvektor $\Phi(\boldsymbol{v})$.

c) Da $\Phi^* \circ \Phi$ und $\Phi \circ \Phi^*$ selbstadjungiert sind, gibt es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $\Phi^* \circ \Phi$ und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $\Phi \circ \Phi^*$.
Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die gemeinsamen Eigenwerte und $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ eine Orthonormalbasis zu $\Phi \circ \Phi^*$ mit $\Phi \circ \Phi^*(\boldsymbol{v}_i) = \lambda_i \boldsymbol{v}_i \, (i = 1, \dots, n)$ und $\{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n\}$ eine Orthonormalbasis zu $\Phi^* \circ \Phi$ mit $\Phi^* \circ \Phi(\boldsymbol{w}_i) = \lambda_i \boldsymbol{w}_i \, (i = 1, \dots, n)$.
Es sei $\Psi : V \longrightarrow V$ definiert durch $\Psi(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i$. Ψ ist eine Isometrie (da die Orthonormalbasis $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ auf die Orthonormalbasis $\{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_n\}$ abgebildet wird) mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned}
\Psi^{-1} \circ \Phi^* \circ \Phi \circ \Psi(\boldsymbol{v}_i) &= \Psi^{-1} \circ \Phi^* \circ \Phi(\boldsymbol{w}_i) \\
&= \Psi^{-1}(\Phi^* \circ \Phi(\boldsymbol{w}_i)) \\
&= \Psi^{-1}(\lambda_i \boldsymbol{w}_i) \\
&= \lambda \Psi^{-1}(\boldsymbol{w}_i) \\
&= \lambda_i \boldsymbol{v}_i \\
&= \Phi \circ \Phi^*(\boldsymbol{v}_i)
\end{aligned}$$

Da die beiden Abbildungen $\Psi^{-1} \circ \Phi^* \circ \Phi \circ \Psi$ und $\Phi \circ \Phi^*$ auf der Basis $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ übereinstimmen, gilt wie behauptet die Gleichheit.

II.4 (4 Punkte)
Gegeben sei die reelle 4×4-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A orthogonal ist, bestimmen Sie die Normalform $\widetilde{A}$ von A und eine orthogonale Matrix T, für die $\widetilde{A} = T^T A T$ gilt.

Lösung:

Bestimmung der Normalform: Die Matrix A ist orthogonal, denn es gilt $A \cdot A^T = A^T \cdot A = E_4$. Zur Bestimmung ihrer Normalform $\widetilde{A}$ betrachten wir die symmetrische Matrix

$$B := A + A^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind $\lambda_1 = 2$ (2-fach) und $\lambda_2 = 1$ (ebenfalls 2-fach). Mit $\cos\omega := \frac{\lambda_2}{2}$ erhalten wir folgende Normalform:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Bestimmung einer zugehörigen Transformationsmatrix: Wir bestimmen die zu λ_1 und λ_2 gehörigen Eigenräume von B und erhalten

$$K_{\lambda_1} = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}] =: [\vec{c}_1, \vec{c}_2] \text{ und } K_{\lambda_2} = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}] =: [\vec{c}_3, \vec{c}_4].$$

Eine ONB $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ in K_{λ_1} erhält man durch $\vec{b}_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{c}_1$ und $\vec{b}_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{c}_2$.

In K_{λ_2} bestimmen wir ausgehend von $\{\vec{c}_3, A\vec{c}_3\} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}\}$ eine ONB $\{\vec{b}_3, \vec{b}_4\}$ durch

$$\begin{aligned} \vec{b}_3 &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{c}_3 \\ \widetilde{\vec{b}}_4 &:= A\vec{c}_3 - \langle A\vec{c}_3, \vec{b}_3\rangle \vec{b}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \vec{b}_4 = \frac{1}{\sqrt{\langle \widetilde{\vec{b}}_4, \widetilde{\vec{b}}_4\rangle}}\widetilde{\vec{b}}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit hat A bezüglich der Basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\}$ die Normalform $\widetilde{A}$ und

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist eine Matrix der gewünschten Art.

II.5 (4 Punkte)
Im Vektorraum $\mathbb{C}^3$ sei die lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ mit

$$\Phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Durch eine hermitesche, positiv definite 3×3-Matrix G wird mit

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^T G \,\overline{\boldsymbol{y}}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^3$ definiert.

a) Zeigen Sie, dass durch $G = \begin{pmatrix} 2 & -i & i \\ i & 2 & -i \\ -i & i & 2 \end{pmatrix}$ ein Skalarprodukt definiert ist und dass Φ bezüglich dieses Skalarprodukts eine Isometrie ist.

b) Bestimmen Sie alle hermiteschen, positiv definiten Matrizen G, sodass die Abbildung Φ bezüglich des durch G definierten Skalarprodukts eine Isometrie ist.

Lösung:

Mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^3$: $\Phi(\boldsymbol{x}) = A \cdot \boldsymbol{x}$.

a) $G = \begin{pmatrix} 2 & -i & i \\ i & 2 & -i \\ -i & i & 2 \end{pmatrix}$ ist hermitesch (es ist $\overline{G}^T = G$) und positiv definit, denn für die Hauptminoren gilt $\det(2) = 2 > 0, \det \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} = 3 > 2$ und $\det G = 8 - i^3 + i^3 + 6i^2 = 2 > 0$.
Φ ist eine Isometrie für das Skalarprodukt $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle := \boldsymbol{x}^T G \overline{\boldsymbol{y}}$, denn aus:

$$A^T G \overline{A} = A^T G A = \begin{pmatrix} i & 2 & -i \\ -i & i & 2 \\ 2 & -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -i & i \\ i & 2 & -i \\ -i & i & 2 \end{pmatrix} = G$$

folgt

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^3 : \langle A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y} \rangle = \boldsymbol{x}^T A^T G \overline{A} \overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{x}^T G \overline{\boldsymbol{y}} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle.$$

b) Φ ist eine Isometrie bezüglich des durch G definierten Skalarprodukts genau dann, wenn $A^T G \overline{A} = G$ gilt. G soll außerdem hermitesch sein. Also setzt man wie folgt an:

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ \overline{g}_{12} & g_{22} & g_{23} \\ \overline{g}_{13} & \overline{g}_{23} & g_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } g_{11}, g_{22}, g_{33} \in \mathbb{R} \text{ und } g_{12}, g_{13}, g_{23} \in \mathbb{C}.$$

Nun ist

$$\begin{pmatrix} g_{22} & g_{23} & \overline{g}_{12} \\ \overline{g}_{23} & g_{33} & \overline{g}_{13} \\ g_{12} & g_{13} & g_{11} \end{pmatrix} = A^T G A = G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ \overline{g}_{12} & g_{22} & g_{23} \\ \overline{g}_{13} & \overline{g}_{23} & g_{33} \end{pmatrix} \iff g_{11} = g_{22} = g_{33} \text{ und } g_{12} = g_{23} = \overline{g}_{13}.$$

Also sind die gesuchten Matrizen G genau die positiv definiten Matrizen der Form

$$G = \begin{pmatrix} a & b & \overline{b} \\ \overline{b} & a & b \\ b & \overline{b} & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}.$$

Positiv definit ist so ein G genau dann, wenn die Hauptminoren positiv sind, also wenn $a > 0$, $a^2 - |b|^2 > 0$ und $a^3 + (b^3 + \overline{b}^3) - 3a|b|^2 > 0$ gilt.

II.6 (4 Punkte)
Es sei Φ ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen unitären Vektorraums $V \neq \{\boldsymbol{o}\}$ mit der Adjungierten $\Phi^* = -\Phi$. Zeigen Sie:

a) Alle Eigenwerte von Φ haben die Form ic mit $c \in \mathbb{R}$.

b) $i\Phi$ ist selbstadjungiert.

c) Es gilt
$$\max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{o}} \left| \frac{\langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle} \right| = \max\left\{ |\lambda| \;\middle|\; \lambda \text{ ist Eigenwert von } \Phi \right\}.$$

Lösung:
$\langle\cdot,\cdot\rangle$ sei das Skalarprodukt auf V. Dann gilt für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ und alle $a \in \mathbb{C}$: $\langle a\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = a\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \overline{a}\boldsymbol{y}\rangle$.
a) Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von Φ und $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ ein zugehöriger Eigenvektor mit $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = 1$. Dann gilt:

$$\lambda = \lambda\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \lambda\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \Phi(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{v}, \Phi^*(\boldsymbol{v})\rangle = -\langle \boldsymbol{v}, \Phi(\boldsymbol{v})\rangle = -\langle \boldsymbol{v}, \lambda\boldsymbol{v}\rangle = -\overline{\lambda}\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = -\overline{\lambda}.$$

Also gilt $\overline{\lambda} = -\lambda$. Setzt man $\lambda = b + ic$ mit $b, c \in \mathbb{R}$, so heißt dies $-b - ic = b - ic$ bzw. $b = 0$ und damit letztendlich $\lambda = ic$, $c \in \mathbb{R}$.
b) Für alle $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ gilt:

$$\langle i\Phi(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}\rangle = i\langle \Phi(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}\rangle = i\langle \boldsymbol{v}, \Phi^*(\boldsymbol{w})\rangle = i\langle \boldsymbol{v}, -\Phi(\boldsymbol{w})\rangle = \langle \boldsymbol{v}, -\overline{i}\Phi(\boldsymbol{w})\rangle = \langle \boldsymbol{v}, i\Phi(\boldsymbol{w})\rangle.$$

Also ist $i\Phi$ selbstadjungiert.
c)
$$\text{Es sei } M := \max\{|\lambda| \;|\lambda \text{ ist Eigenwert von } \Phi\} \text{ und } N := \max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{o}} \left| \frac{\langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle} \right|.$$

Dann ist $N \geq M$, da für einen Eigenwert λ mit $|\lambda| = M$ und zugehörigem Eigenvektor $\boldsymbol{v}$ gilt:

$$N = \max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{o}} \left| \frac{\langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle} \right| \geq \left| \frac{\langle \Phi(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}\rangle}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle} \right| = \left| \frac{\lambda\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle} \right| = |\lambda| = M.$$

Es bleibt zu zeigen, dass auch $M \geq N$ gilt.
Da $i\Phi$ selbstadjungiert ist, ist $i\Phi$ orthogonal diagonalisierbar und dies gilt auch für Φ. Es sei $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ eine ONB von V aus Eigenvektoren von Φ und für $i = 1, \dots, n$ gelte $\Phi(\boldsymbol{v}_i) = \lambda_i\boldsymbol{v}_i$. Außerdem sei $|\lambda_n| = M$. Dann gilt für $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{v}_i \in V \setminus \{\boldsymbol{o}\}$:

$$\begin{aligned} |\langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\rangle| &= \left|\langle \Phi(\sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{v}_i), \sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{v}_i\rangle\right| = \left|\langle \sum_{i=1}^n x_i\lambda_i\boldsymbol{v}_i, \sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{v}_i\rangle\right| \overset{ONB}{=} \left|\sum_{i=1}^n |x_i|^2\lambda_i\right| \\ &\overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} M \cdot \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = M \cdot \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle. \end{aligned}$$

Damit gilt für alle $\boldsymbol{x} \in V \setminus \{\boldsymbol{o}\}$:
$$M \geq \left| \frac{\langle \Phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}\rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle} \right|,$$
also ist $M \geq N$ und damit insgesamt $M = N$.