Aufgabe I.1 (4 Punkte)

Gegeben seien die Matrix

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und die Menge

$$L := \{A \in \mathbb{R}^{4\times 4} \mid A^\top H A = H\}$$

Zeigen Sie:

a) L ist bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe.

b) Die Matrizen der Form
$$\begin{pmatrix} E & O \\ O & B \end{pmatrix},$$
wobei $E \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Einheitsmatrix, $O \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Nullmatrix und $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine orthogonale Matrix ist, gehören zu L.

c) L ist nicht abelsch.

Beweis:

a) Jedes $A \in L$ ist invertierbar, denn aus $A^\top HA = H$ folgt $\det(A)\det(H)\det(A) = \det(H) = -1$, also insbesondere $\det(A) \neq 0$.

Damit ist L eine Teilmenge der Gruppe $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ und wir können das Untergruppenkriterium anwenden:

- L ist nicht leer, da die Einheitsmatrix E_4 in L liegt: es ist $E_4^\top H E_4 = H$.
- Ist $A \in L$, so auch $A^{-1} \in L$: denn es ist $(A^{-1})^\top HA^{-1} = (A^{-1})^\top(A^\top HA)A^{-1} = H$.
- Sind A und B in L, so auch AB: es ist $(AB)^\top H(AB) = B^\top(A^\top HA)B = B^\top HB = H$.

Damit ist gezeigt, dass L Untergruppe von $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ ist.

b) B ist orthogonal bedeutet, dass $B^\top B = E_2$ ist. Schreibt man H als $H = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$, mit $C := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $E := E_2$, so ist

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^\top \cdot H \cdot \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^\top CE & 0 \\ 0 & B^\top(-E)B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} = H.$$

Also ist $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in L$.

c) $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sind orthogonale Matrizen, wie man auch ohne Rechnung sieht. Also sind nach b) $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ in L. Nun ist

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}.$$

Deshalb ist L nicht abelsch.

Anmerkungen

1. In Teil a) konnte man statt des Untergruppenkriteriums auch direkt die Gruppenaxiome nachrechnen. Allerdings sollte man in jedem Fall die Assoziativität der Verknüpfung aus der Assoziativität der Matrizenmultiplikation übernehmen! Häufig wurde bei diesem Ansatz vergessen zu zeigen, dass auf L überhaupt eine Verknüpfung gegeben ist, dass also L unter der Matrizenmultiplikation abgeschlossen ist.

2. Die Aussage in Teil c) folgt nicht schon daraus, dass die Matrizenmultiplikation im Allgemeinen nicht kommutativ ist: auch nicht kommutative (Halb-)Gruppen haben kommutative Untergruppen.

Aufgabe I.2 (4 Punkte)

Es seien V ein Vektorraum und U_1, U_2, U_3 Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

a) $V = U_1 \cup U_2 \Longrightarrow V = U_1$ oder $V = U_2$.

b) $U_1 \subset U_3 \Longleftrightarrow U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap U_3$.

Lösung:

a) Sei $V = U_1 \cup U_2$ und $U_1 \neq V$.
Es genügt dann $U_1 \subseteq U_2$ zu zeigen. Sei dazu $x \in U_1$ beliebig und $u \in U_2 \setminus U_1$ (das geht, da $U_1 \neq V$ und $U_1 \cup U_2 = V$ ist). Sei nun $v = x + u$. Dann ist $v \in U_2$, da aus $v \in U_1$ folgen würde, dass $u = x - v \in U_1$ ist, was im Widerspruch zu $u \in U_2 \setminus U_1$ steht.
Also ist $x = v - u \in U_2$ und also $U_1 \subseteq U_2$. Insgesamt ist damit $V = U_1 \cup U_2 = U_2$ und die Behauptung bewiesen.

b) „$\Longleftarrow$ “ Es gelte $U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap U_3$.
Dann gilt

$$U_1 \subseteq U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap U_3 \subseteq U_3$$

und also $U_1 \subseteq U_3$.

„$\Longrightarrow$ “ Es gelte $U_1 \subseteq U_3$.
i) Sei $x \in U_1 + (U_2 \cap U_3)$. Dann gibt es ein $u_1 \in U_1$ und ein $u_{23} \in U_2 \cap U_3$ mit $x = u_1 + u_{23}$. Insbesondere ist $u_{23} \in U_2$ und somit $x = u_1 + u_{23} \in U_1 + U_2$. Da $U_1 \subseteq U_3$ vorausgesetzt ist, liegt neben u_{23} auch u_1 in U_3 und also $x = u_1 + u_{23} \in U_3$.
Insgesamt ist $x \in (U_1 + U_2) \cap U_3$ und es folgt

$$U_1 + (U_2 \cap U_3) \subseteq (U_1 + U_2) \cap U_3 \ .$$

ii) Sei nun $x \in (U_1 + U_2) \cap U_3$. Dann gibt es ein $u_1 \in U_1$ und ein $u_2 \in U_2$ mit $x = u_1 + u_2$. Da x insbesondere in U_3 liegt, gilt wegen $u_1 \in U_1 \subseteq U_3$, dass $u_2 = x - u_1 \in U_3$ ist. Also ist $u_2 \in U_2 \cap U_3$ und damit $x = u_1 + u_2 \in U_1 + (U_2 \cap U_3)$. Insgesamt ist somit

$$U_1 + (U_2 \cap U_3) \supseteq (U_1 + U_2) \cap U_3 \ .$$

Aus i) und ii) folgt also

$$U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap U_3 \ ,$$

was die Behauptung war.

Aufgabe I.3 (4 Punkte)

Es seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum und Φ ein Endomorphismus von V mit

$$\text{Kern } \Phi = \text{Kern } (\Phi^2). \qquad (*)$$

Zeigen Sie:

a) $V = \text{Kern } \Phi \oplus \text{Bild } \Phi$.

b) Die Aussage in a) gilt ohne die Voraussetzung $(*)$ im Allgemeinen nicht (Gegenbeispiel!).

Lösung:

a) **Beh.**: $V = \text{Kern}\,\Phi \oplus \text{Bild}\,\Phi$

   i) Wir zeigen zunächst $\text{Kern}\,\Phi \cap \text{Bild}\,\Phi = \{0\}$, wobei nur die nichttriviale Inklusion $'\subset'$ angegeben wird.

   Sei $x \in \text{Kern}\,\Phi \cap \text{Bild}\,\Phi$. Dann gilt $\Phi(x) = 0$ und es gibt ein $y \in V$ mit der Eigenschaft $x = \Phi(y)$. Das zusammengefasst ergibt $0 = \Phi(\underbrace{\Phi(y)}_{=x}) = \Phi^2(y)$, woraus $y \in \text{Kern}\,\Phi^2$ folgt. Wegen der Voraussetzung (*) gilt $y \in \text{Kern}\,\Phi$ und damit $x = \Phi(y) = 0$.

   ii) Da V endlichdimensional ist, reicht es zu zeigen, dass V und $\text{Kern}\,\Phi + \text{Bild}\,\Phi$ die gleiche Dimension haben. Dazu verwenden wir 1.) den Dimensionssatz für Endomorphismen und 2.) den Dimensionssatz über Summe und Schnitt von Untervektorräumen.

$$\begin{aligned}
\dim V &\overset{1.)}{=} \dim \text{Kern}\,\Phi + \dim \text{Bild}\,\Phi \\
&\overset{2.)}{=} \dim(\text{Kern}\,\Phi + \text{Bild}\,\Phi) + \dim(\underbrace{\text{Kern}\,\Phi \cap \text{Bild}\,\Phi}_{=\{0\}}) \\
&= \dim(\text{Kern}\,\Phi + \text{Bild}\,\Phi)
\end{aligned}$$

b) Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

   Mit den Standardbasisvektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt dann:

   $\text{Kern}\,\Phi = [e_2]$ und $\text{Kern}\,\Phi^2 = \mathbb{R}^2$, also $\text{Kern}\,\Phi \neq \text{Kern}\,\Phi^2$.

   Andererseits ist $\text{Bild}\,\Phi = [e_2] = \text{Kern}\,\Phi$, und damit $\text{Kern}\,\Phi + \text{Bild}\,\Phi = [e_2] \neq \mathbb{R}^2$.

Aufgabe I.4 (4 Punkte)

Gegeben seien die n Linearformen

$$\begin{aligned} \Phi_j\ :\ \ \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}\,,\quad (x_1,\ldots,x_n)\mapsto x_j - x_{j+1} \quad \text{für } j=1,\ldots,n-1\,,\\ \Phi_n\ :\ \ \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}\,,\quad (x_1,\ldots,x_n)\mapsto x_n\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $B^* = (\Phi_1,\ldots,\Phi_n)$ eine Basis des Dualraums von $\mathbb{R}^n$ ist, und geben Sie eine Basis $B=(b_1,\ldots,b_n)$ von $\mathbb{R}^n$ an, die B^* als Dualbasis hat.

Beweis:

Nach Vorlesung ist notwendig und hinreichend für Dualbasen das LGS

$$\Phi_j(b_i) = \delta_{ji},\ i,j=1,\ldots,n \text{ (Kronecker} - \text{Delta)}.$$

Damit $b_i = (x_1,\ldots,x_n)$ das erfüllt, sind notwendig und hinreichend laut Definition der Φ_j):
1.$x_1 = x_2 = \cdots = x_i$ ($\Phi_j(b_i) = 0$ für $1\le j < i \le n$),
2.$x_{i+1} = x_{i+2} = \cdots = x_n$ ($\Phi_j(b_i) = 0$ für $n > j > i$) bzw. $x_n = 0$ bei $i < j = n$.
3.$x_i + x_{i+1} = 1$. ($\Phi_j(b_i) = 1$ für$j = i < n$) bzw. $x_n = 1$ bei $j = i = n$.
Offensichtlich stimmt das, wenn man setzt: $x_1 = x_2 = \cdots = x_i = 1$ und $x_{i+1} = x_{i+2} = \cdots = x_n = 0$.
Damit erfüllt $b_i = (1,\ldots,1,0,\ldots,0)$ (die erste 0 an der Stelle $i+1$) das LGS ($i=1,\ldots,n$).
Die b_i sind linear unabhängig (z.B. weil sie untereinandergeschrieben eine Dreiecksmatrix mit Determinante 1 bilden), n linear unabhängige Vektoren bilden laut Vorlesung eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Damit ist gezeigt, dass $B^* = (\Phi_1,\ldots,\Phi_n)$ die Dualbasis zur Basis B, also eine Basis des Dualraums ist.
(Übrigens folgt schon allein aus dem LGS leicht, dass sowohl die b_i als auch die Φ_j linear unabhängig sind, also Basen ihrer jeweiligen Räume bilden; aber ich bin nicht sicher, ob das so in Ihrer Vorlesung ausgesprochen wurde.) (HPR)

Aufgabe I.5 (4 Punkte)

Es seien V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad höchstens 3 und Φ ein Endomorphismus von V mit

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \Phi(1) & = & (1+a) & + & 2x & - & x^2 & & \\ \Phi(x) & = & & & ax & & & + & (a-2)x^3 \\ \Phi(x^2) & = & (a+a^2) & + & 2ax & - & ax^2 & + & 3x^3 \\ \Phi(x^3) & = & & & & & & & ax^3 \end{array},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

a) Geben Sie die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich der geordneten Basis $(1, x, x^2, x^3)$ von V an.

b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die Φ diagonalisierbar ist.

Lösung:

$$V = \{ax^3 + bx^2 + cx + d : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 0 & a+a^2 & 0 \\ 2 & a & 2a & 0 \\ -1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & a-2 & 3 & a \end{pmatrix}.$$

(b) Φ ist genau dann diagonalisierbar, wenn die Summe der Eigenraumdimensionen 4 ergibt.

Das charakteristische Polynom lautet in unserem Fall:

$$p(x) = \det(A - xE) = \cdots = x(x-1)(a-x)^2$$

(i) $\underline{a \notin \{0,1\}}$

Ist E_c der Eigenraum zum Eigenwert c, so folgt $\dim E_0 = 1, \dim E_1 = 1$ und $\dim E_a \in \{1,2\}$

$$\dim E_a = 4 - \operatorname{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+a^2 & 0 \\ 2 & 0 & 2a & 0 \\ -1 & 0 & -2a & 0 \\ 0 & a-2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 4 - \operatorname{Rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a+a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2a^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{somit gilt} \quad \dim E_a = \begin{cases} 2 & , \quad a = 2 \\ 1 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

(ii) $\underline{a=0}$

$p(x) = -x^3(x-1)$ und somit $\dim E_1 = 1$.

$$\dim E_0 = 4 - \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

(iii) $\underline{a=1}$

$p(x) = x(x-1)^3$ und somit $\dim E_0 = 1$.

$$\dim E_1 = 4 - \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 4 - \mathrm{Rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

D.h., nur im Falle $a = 2$ ist die Summe der Eigenraumdimensionen gleich 4.
Φ ist somit ausschließlich für $a = 2$ diagonalisierbar.

Aufgabe I.6 (4 Punkte)

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $b \neq c$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ werde eine reelle $(n \times n)$ - Matrix

$$A_x = \begin{pmatrix} a-x & b-x & \cdots & \cdots & b-x \\ c-x & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b-x \\ c-x & \cdots & \cdots & c-x & a-x \end{pmatrix}.$$

definiert.

a) Bestimmen Sie $\det A_b$ und $\det A_c$.

b) Zeigen Sie, dass $\det A_x$ als Polynom in x den Grad ≤ 1 hat.
Hinweis: Sie müssen dafür die Koeffizienten des Polynoms nicht explizit berechnen.

c) Berechnen Sie $\det A_0$ unter Verwendung von a) und b).

Lösung:

(a) Es gilt:

$$A_b = \begin{pmatrix} a-b & 0 & \cdots & 0 \\ c-b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ c-b & \cdots & c-b & a-b \end{pmatrix}, \; A_c = \begin{pmatrix} a-c & b-c & \cdots & b-c \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b-c \\ 0 & \cdots & 0 & a-c \end{pmatrix}.$$

Die Determinante einer Dreiecksmatrix berechnet sich bekanntlich als Produkt der Diagonaleinträge. Damit erhält man:

$$\det(A_b) = (a-b)^n \quad \text{und} \quad \det(A_c) = (a-c)^n.$$

(b) Die Determinante einer Matrix ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile das Vielfache einer anderen Zeile addiert. Das kann man dazu benutzen, die Anzahl der Einträge zu reduzieren, in denen die Variable x auftritt, indem man die erste Zeile von allen anderen abzieht:

$$\begin{aligned} \det(A_x) &= \begin{vmatrix} a-x & b-x & \cdots & b-x \\ c-x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b-x \\ c-x & \cdots & c-x & a-x \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a-x & b-x & \cdots & \cdots & b-x \\ c-a & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ c-a & \cdots & \cdots & c-a & a-b \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Entwickelt man nun nach der ersten Zeile, so erhält man

$$\det(A_x) = (a-x) \cdot \det(B_1) - (b-x) \cdot \det(B_2) + \cdots \pm (b-x) \cdot \det(B_n)$$

mit Matrizen $B_1, \ldots, B_n$, die unabhängig von x sind. Die Determinante ist also Polynom vom Grad höchstens 1 in x.

Es gibt natürlich noch viele andere Zeilen- oder Spaltenumformungen, die das Ablesen des gewünschten Ergebnisses in ähnlicher Weise erleichtern.

(c) Aus dem (b)-Teil ist bekannt, dass die Determinante von A_x sich schreiben lässt als lineares Polynom („Gerade“)

$$\det(A_x) = \alpha x + \beta,$$

wo α und β von den Parametern a, b, c abhängen können, jedoch nicht von x. Dabei ist der konstante Term β die gesuchte Determinante $\det(A_0)$. Im (a)-Teil hat man schon zwei Funktionswerte berechnet und erhält somit ein lineares Gleichungssystem

$$\alpha b + \det(A_0) = (a-b)^n \tag{1}$$

$$\alpha c + \det(A_0) = (a-c)^n \tag{2}$$

Aus $\frac{c}{c-b} \cdot (1) - \frac{b}{c-b} \cdot (2)$ kann man ablesen:

$$\det(A_0) = \frac{c}{c-b}(a-b)^n - \frac{b}{c-b}(a-c)^n.$$

Aufgabe II.1 (4 Punkte)

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform $\widetilde{A}$ sowie das Minimalpolynom m von A, und geben Sie eine reguläre Matrix S an, sodass $\widetilde{A} = S^{-1}AS$ gilt.

Lösung:

Das charakteristische Polynom von A ist (durch Entwicklung nach der zweiten Zeile)

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} 1-X & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-X & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1-X \end{pmatrix} = \\
&= 1\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2-X & 1 \\ 1 & 0 & 1-X \end{pmatrix} - X\cdot\det\begin{pmatrix} 1-X & -1 & -1 \\ 0 & 2-X & 1 \\ 1 & 0 & 1-X \end{pmatrix} \\
&= 1\cdot[-1+2-X] - X\cdot[(1-X)^2(2-X)-1+2-X] \\
&= (1-X)[1-X\big((1-X)(2-X)+1\big)] = (1-X)^2\cdot[1-X(2-X)] = (X-1)^4.
\end{aligned}$$

Es ist also 1 der einzige Eigenwert von A. Nun gilt:

$$A - E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A-E_4)^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es gibt $4 - \mathrm{Rang}(A - E_4) = 4 - 2 = 2$ Jordankästchen zum Eigenwert 1, und da $(A - E_4)^2$ nicht die Nullmatrix ist, hat mindestens eines der Kästchen Länge ≥ 3. Da die Summe der Längen der Kästchen 4 ist, ist die Jordan'sche Normalform von A gleich

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Das Minimalpolynom ist damit $(X-1)^3$.
Da $(A-E_4)^2 e_1 \neq 0$ gilt, kann man als die ersten Vektoren einer Jordanbasis die Vektoren

$$b_1 := e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 := (A-E_4)b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 := (A-E_4)^2 b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

verwenden. Als vierten Vektor braucht man dann einen Vektor im Kern von $(A - E_4)$, der b_1, b_2, b_3 zu einer Basis ergänzt, also noch nicht Vielfaches von b_3 ist, z.B.

$$b_4 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich eine mögliche Basiswechselmatrix S als die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe II.2 (4 Punkte)

Im euklidischen Standardvektorraum $\mathbb{R}^5$ seien der Untervektorraum

$$U = [\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}]$$

und der Vektor

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie den Abstand von x zu $U^{\perp}$.

Lösung:

1. Berechnung von $U^{\perp}$:

   Wir lösen das folgende homogene LGS und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Dabei wurde im 1. Schritt die erste Zeile einmal von der zweiten und der vierten, und zweimal von der dritten abgezogen. Im 2. Schritt wurde die zweite Zeile zweimal von der ersten und der letzten subtrahiert. In den letzten beiden Schritte wurde die zweite und dritte Zeile von der ersten abgezogen.

   Als Basis des Komplementärraums von U in $\mathbb{R}^5$ erhalten wir

$$\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

   Da beide Vektoren paarweise orthogonal sowie orthogonal zu U sind, ist eine ONB $\{b_1, b_2\}$

von $U^\perp$ gegeben durch

$$\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\}.$$

2. Orthogonalprojektion $\pi(x)$ von x auf $U^\perp$:
   Es gilt

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \langle x, b_1\rangle b_1 + \langle x, b_2\rangle b_2\\ &= \langle\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\rangle\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{12}\langle\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\rangle\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3. Der Abstand von x zu $U^\perp$ beträgt also

$$d(x, U^\perp) = \|x - \pi(x)\| = \sqrt{\langle\begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\\1\end{pmatrix}\rangle} = \sqrt{10}.$$

Aufgabe II.3 (4 Punkte)

Es seien V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ und Φ ein Endomorphismus von V.

a) Geben Sie eine Definition der adjungierten Abbildung Φ^* von Φ.

b) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

   (i) Φ^* existiert und es gilt $\Phi^* = -\Phi$.

   (ii) Für alle $x \in V$ gilt $\langle \Phi(x), x\rangle = 0$.

Lösung:

a) Ist V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot\rangle$ und Φ ein Endomorphismus von V, so heißt Φ^* die zu Φ adjungierte Abbildung, falls für alle $x, y \in V$

$$\langle \Phi(x), y\rangle = \langle x, \Phi^*(y)\rangle$$

gilt.

b) „$(i) \Rightarrow (ii)$" Für alle $x \in V$ gilt

$$\langle \Phi(x), x\rangle \overset{\Phi^* \text{ ex.}}{=} \langle x, \Phi^*(x)\rangle \overset{\Phi^*=-\Phi}{=} -\langle x, \Phi(x)\rangle = -\langle \Phi(x), x\rangle.$$

Somit gilt für alle $x \in V$: $\langle \Phi(x), x\rangle = 0$. $\square$

„$(ii) \Rightarrow (i)$" Nach Voraussetzung gilt für alle $x, y \in V$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x+y, \Phi(x+y)\rangle \\ &= \underbrace{\langle x, \Phi(x)\rangle}_{=0} + \langle y, \Phi(x)\rangle + \langle x, \Phi(y)\rangle + \underbrace{\langle y, \Phi(y)\rangle}_{=0} \\ &= \langle y, \Phi(x)\rangle + \langle x, \Phi(y)\rangle. \end{aligned}$$

Somit gilt für alle $x, y \in V$ die Gleichung $\langle \Phi(x), y\rangle = \langle x, (-\Phi)(y)\rangle$; das heißt, dass die zu Φ Adjungierte Φ^* existiert und $\Phi^* = -\Phi$ gilt. $\square$

Aufgabe II.4 (4 Punkte)

Es seien V ein euklidischer Vektorraum und Φ ein bijektiver Endomorphismus von V, der die Orthogonalität erhält, das heißt für alle $v, w \in V$ gilt:

$$v \perp w \quad \Longrightarrow \quad \Phi(v) \perp \Phi(w).$$

Zeigen Sie, dass es eine reelle Zahl s gibt, für die $s \cdot \Phi$ eine Isometrie von V ist.

Lösung:

Wir zeigen, dass ein $s \in \mathbb{R}$ existiert, $s \neq 0$, so dass für alle $x \in V$ gilt: $\|s\Phi(x)\| = \|x\|$. Dann ist $s\Phi$ eine Isometrie.

Äquivalent dazu ist die Behauptung: Es gibt ein $r \neq 0$, so dass für alle $x \in V$ gilt: $\|\Phi(x)\| = r\|x\|$. $\quad$ (s ist dann $\frac{1}{r}$)

Wir wählen einen beliebigen aber festen Einheitsvektor $e \in V$. Dann ist nach Voraussetzung $\Phi(e) \neq o$ und damit $\|\Phi(e)\| \neq 0$. Wir zeigen, dass $r := \|\Phi(e)\|$ die gesuchte reelle Zahl ist:

Für jeden anderen Einheitsvektor x gilt dann $\langle x+e, x-e \rangle = 1-1 = 0$, also nach Voraussetzung auch $\langle \Phi(x+e), \Phi(x-e) \rangle = 0$,, woraus $\|\Phi(x)\| = \|\Phi(e)\| = r$ folgt.
Damit gilt für alle $x \in V, x \neq o$: $\|\Phi(\frac{1}{\|x\|}x)\| = r$, also $\|\Phi(x)\| = r\|x\|$. Diese Gleichung gilt natürlich auch für $x = o$.

Aufgabe II.5 (4 Punkte)

Es seien V ein $n-$dimensionaler unitärer Vektorraum, Φ ein Endomorphismus von V und Φ^* die adjungierte Abbildung von Φ. Zeigen Sie:

a) Φ ist genau dann eine Isometrie, wenn Φ normal ist und alle Eigenwerte von Φ den Betrag 1 haben.

b) Gibt es eine natürliche Zahl $k \geq 2$ mit $\Phi^* = \Phi^k$ und ist Φ bijektiv, so ist Φ eine Isometrie.

Lösung:

a) **Beh:** Φ Isometrie $\iff$ Φ normal und jeder EW. von Φ hat Betrag 1

Bew: „$\Rightarrow$": Sei Φ Isometrie (d.h. $\Phi^* = \Phi^{-1}$) und λ ein EW. von Φ (d.h. $\exists x \neq 0 : \Phi(x) = \lambda x$). Dann folgt $\Phi^* \circ \Phi = \Phi^{-1} \circ \Phi = \mathrm{id}_V = \Phi \circ \Phi^{-1} = \Phi \circ \Phi^*$ (d.h. Φ ist normal) und

$$\|x\| = \|\Phi(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

(erste Gleichung: Isometrie-Eigenschaft). Mit $x \neq 0$ folgt $|\lambda| = 1$, d.h. λ hat Betrag 1.

„$\Leftarrow$": Sei Φ normal mit der Eigenschaft, dass alle EW.e Betrag 1 haben. Die Normalität impliziert die Existenz einer ONB $x_1, \ldots, x_n$ aus EV.en von Φ (mit zugeh. EW.en $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vom Betrag 1). Es sei A_Φ die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich dieser Basis.

$$A_\Phi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A_\Phi \cdot \overline{A_\Phi}^\top = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & & \\ & |\lambda_2|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}.$$

Da alle EW.e den Betrag 1 haben, ist die letzte Matrix gleich E_n. Also ist $A_\Phi \cdot \overline{A_\Phi}^\top = E_n$ und analog $\overline{A_\Phi}^\top \cdot A_\Phi = E_n$. Somit ist Φ eine Isometrie.

b) Es sei Φ bijektiv und es existiere $k \geq 2$ mit $\Phi^* = \Phi^k$. Dann ist Φ **normal**, denn

$$\Phi^* \circ \Phi = \Phi^k \circ \Phi = \Phi^{k+1} = \Phi \circ \Phi^k = \Phi \circ \Phi^*.$$

Ist λ ein beliebiger EW von Φ (zum EV $x \neq 0$), so gilt $\lambda \neq 0$ (da Φ bijektiv ist) und

$$\begin{aligned} \overline{\lambda} \cdot \langle x, x \rangle &= \langle x, \lambda x \rangle = \langle x, \Phi(x) \rangle = \langle \Phi^*(x), x \rangle = \langle \Phi^k(x), x \rangle \\ &= \langle \lambda^k x, x \rangle = \lambda^k \cdot \langle x, x \rangle. \end{aligned}$$

Mit $x \neq 0$ folgt $\overline{\lambda} = \lambda^k$. Für die Beträge gilt also $|\lambda| = |\overline{\lambda}| = |\lambda^k| = |\lambda|^k$. Division durch $|\lambda| \neq 0$ liefert $|\lambda|^{k-1} = 1$ und wegen $k > 1$ schließlich $|\lambda| = 1$.

Nach der im a)-Teil bewiesenen Aussage ist also Φ eine Isometrie.

Aufgabe II.6 (4 Punkte)

Im $\mathbb{R}^n$ sei eine affine Abbildung φ gegeben. Zeigen Sie:

Ist $\varphi^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ und besitzt φ genau einen Fixpunkt, so gilt $\varphi(x) = -x + a$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit einem festen Translationsvektor $a \in \mathbb{R}^n$.

Lösung

Die gesuchte affine Abbildung hat die Form $\varphi : x \mapsto Ax + a$ mit der $n \times n$-Matrix A und $a \in \mathbb{R}^n$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \varphi \text{ hat genau einen Fixpunkt} &\iff \varphi(x) = x \text{ ist eindeut. lösbar} \iff \\ (A - E_n)x = -a \text{ ist eindeut. lösbar} &\iff A - E_n \text{ ist invertierbar} \qquad (*) \end{aligned}$$

Und weiter

$$\begin{aligned} \varphi^2(x) = x \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n &\iff A(Ax + a) + a = x \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n \iff \\ (A^2 - E_n)x = -Aa - a \;\; \forall x \in \mathbb{R}^n &\iff Aa + a = 0, \; A^2 - E_n = O \\ & \text{(1. Gleichung erhält man mit } x = 0\text{).} \end{aligned}$$

Wegen $A^2 - E_n = O$ gilt $(A - E_n) \cdot (A + E_n) = O$. Diese Gleichung multiplizieren wir von links mit $(A - E_n)^{-1}$ (Existiert wegen $(*)$). Es folgt $A + E_n = O$, d.h. $A = -E_n$ und

$$\varphi(x) = -x + a, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$