I.1 (4 Punkte)

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und S_n die Gruppe der Permutationen der Menge $M = \{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$. Für alle $a \in M$ sei

$$H_a := \{\sigma \in S_n \,|\, \sigma(a) = a\}.$$

Zeigen Sie:

a) H_a ist eine Untergruppe von S_n.

b) Für alle $\tau \in S_n$ mit $\tau(a) = 1$ gilt

$$H_a = \{\tau^{-1} \circ \rho \circ \tau \,|\, \rho \in H_1\}$$

Lösung:

a) Wir verwenden das Untergruppenkriterium. H_a ist nicht leer, denn die Identität liegt in H_a. Außerdem gilt für alle $\sigma \in H_a$

$$\sigma^{-1}(a) = \sigma^{-1}(\sigma(a)) = a.$$

Wenn also $\sigma, \rho \in H_a$ liegen, so folgt auch

$$[\rho \circ \sigma^{-1}](a) = \rho(\sigma^{-1}(a)) = \rho(a) = a,$$

also (nach Definition)

$$\rho \circ \sigma^{-1} \in H_a.$$

Das Untergruppenkriterium impliziert dann, dass H_a eine Untergruppe von S_n ist.

b) Die Gleichheit $H_a = \{\tau^{-1} \circ \rho \circ \tau \,|\, \rho \in H_1\}$ zeigen wir durch den Nachweis beider Inklusionen.

„$\supseteq$“: Für $\rho \in H_1$ gilt

$$[\tau^{-1} \circ \rho \circ \tau](a) = [\tau^{-1} \circ \rho](\tau(a)) = [\tau^{-1} \circ \rho](1) = \tau^{-1}(1) = \tau^{-1}(\tau(a)) = a,$$

also nach Definition

$$\tau^{-1} \circ \rho \circ \tau \in H_a.$$

„$\subseteq$“: Für $\sigma \in H_a$ gilt umgekehrt

$$\rho_0 := \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1} \in H_1,$$

wie man analog nachrechnet. Also bekommen wir

$$\sigma = \tau^{-1} \circ \rho_0 \circ \tau \in \{\tau^{-1} \circ \rho \circ \tau \,|\, \rho \in H_1\}.$$

I.2 (4 Punkte)

Es seien U, V, W nicht notwendig endlichdimensionale Vektorräume über demselben Körper $\mathbb{K}$ und $\Phi : U \to V$, $\Psi : V \to W$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie:

a) Ist $\Psi \circ \Phi : U \to W$ surjektiv, so existiert zu jedem $v \in V$ ein $u \in U$ mit $\Psi(v) = (\Psi \circ \Phi)(u)$.

b) Ist $\Psi \circ \Phi : U \to W$ ein Isomorphismus, so gilt $V = \operatorname{Bild} \Phi \oplus \operatorname{Kern} \Psi$.

Lösung:

a) Sei $v \in V$ beliebig und $w := \Psi(v)$. Da $\Psi \circ \Phi$ surjektiv ist, gibt es zu jedem Element aus W ein Urbild in U unter der Abbildung $\Psi \circ \Phi$. Also existiert insbesondere auch zu $w = \Psi(v)$ ein entsprechendes u. Damit gibt es zu jedem $v \in V$ ein $u \in U$ mit $\Psi(v) = w = (\Psi \circ \Phi)(u)$.

b) Wir zeigen zuerst: Die Summe Bild(Φ) + Kern(Ψ) ist direkt, d.h.

$$\operatorname{Bild}(\Phi) \cap \operatorname{Kern}(\Psi) = \{0\}.$$

Die Inklusion '$\supset$' ist trivial.

Für die Inklusion '$\subset$' sei $v \in \operatorname{Bild}(\Phi) \cap \operatorname{Kern}(\Psi)$. Dann existiert wegen $v \in \operatorname{Bild}(\Phi)$ ein $u \in U$ mit $\Phi(u) = v$. Anderseits gilt wegen $v \in \operatorname{Kern}(\Psi)$ auch $\Psi(v) = 0$. Damit ist

$$(\Psi \circ \Phi)(u) = \Psi(\Phi(u)) = \Psi(v) = 0.$$

Da $(\Psi \circ \Phi)$ ein Isomorphismus und damit injektiv ist, gilt $\operatorname{Kern}(\Psi \circ \Phi) = \{0\}$, woraus $u = 0$ und letztendlich $v = \Phi(u) = 0$ folgt.

Nun zeigen wir:

$$V = \operatorname{Bild}(\Phi) \oplus \operatorname{Kern}(\Psi).$$

Klar ist: $\operatorname{Bild}(\Phi) \oplus \operatorname{Kern}(\Psi) \subset V$.

Es bleibt die Inklusion '$\supset$' zu zeigen. Sei dazu $v \in V$. Dann existiert ein $u \in U$ mit

$$(\Psi \circ \Phi)(u) = \Psi(v) \qquad (*).$$

Wir betrachten die Vektoren $v_1 := v - \Phi(u)$ und $v_2 := \Phi(u)$. Dann gilt

- $\Psi(v_1) = \Psi(v - \Phi(u)) = \Psi(v) - (\Psi \circ \Phi)(u) = 0$ (siehe $(*)$!), also gilt $v_1 \in \operatorname{Kern}(\Psi)$,
- $v_2 = \Phi(u) \in \operatorname{Bild}(\Phi)$,
- $v = v_1 + v_2$,

woraus $v \in \operatorname{Bild}(\Phi) \oplus \operatorname{Kern}(\Psi)$ folgt.

I.3 (4 Punkte)

Es seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ eine reelle 2×5-Matrix, U der von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untervektorraum des $\mathbb{R}^5$ sowie $\Phi : U \to \mathbb{R}^2\,,\ x \mapsto Ax\,.$
Bestimmen Sie Basen von $\mathrm{Kern}(\Phi)$ und $\mathrm{Bild}(\Phi)$.

Lösung: Zuerst bestimmen wir eine Basis von U.

$$U := [\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underset{\cdot\,\underline{(-1)}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}] = [\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]$$

$$= [\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}] = [\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{b_3}]$$

Damit gilt

$$\Phi(U) = [Ab_1, Ab_2, Ab_3] = [\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},] = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}],$$

und $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ ist eine Basis von $\mathrm{Bild}\,\Phi$. Damit folgt $\dim \mathrm{Bild}\,\Phi = 1$ und

$$\dim \mathrm{Kern}\,\Phi = \dim U - \dim \mathrm{Bild}\,\Phi = 3 - 1 = 2.$$

Wegen $Ab_1 = Ab_2$ liegt $b_1 - b_2$ in $\mathrm{Kern}\,\Phi$. Wegen $Ab_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt auch b_3 in $\mathrm{Kern}\,\Phi$. Da

$$b_1 - b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, bilden sie wegen $\dim \mathrm{Kern}\,\Phi{=}2$ eine Basis von $\mathrm{Kern}\,\Phi$.

I.4 (4 Punkte)

Es seien $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ der Vektorraum der reellen $n \times n$-Matrizen und V^* der Dualraum von V. Für $A \in V$ wird durch

$$\Phi_A : \begin{cases} V & \rightarrow & \mathbb{R} \\ B & \mapsto & \mathrm{Spur}(A^\top B) \end{cases}$$

eine Linearform definiert. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} V & \rightarrow & V^* \\ A & \mapsto & \Phi_A \end{cases}$$

ein Vektorraumisomorphismus ist.

Lösung: Wir müssen zeigen, dass Φ linear und bijektiv ist.

(i) Φ ist linear:
Seien $A_1, A_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir müssen nachweisen, dass

$$\Phi(A_1 + A_2) = \Phi(A_1) + \Phi(A_2) \qquad \text{und} \qquad \Phi(\lambda A_1) = \lambda\Phi(A_1)$$

gilt. Das bedeutet, wir müssen die Gleichheit der Abbildungen

$$\Phi_{A_1+A_2} = \Phi_{A_1} + \Phi_{A_2} \qquad \text{bzw.} \qquad \Phi_{\lambda A_1} = \lambda\Phi_{A_1}$$

nachweisen. Dies zeigen wir, indem wir sie für alle $B \in V$ nachrechnen:

$$\begin{aligned} \Phi_{A_1+A_2}(B) &= \mathrm{Spur}((A_1 + A_2)^\top B) = \mathrm{Spur}(A_1^\top B + A_2^\top B) \\ &= \mathrm{Spur}(A_1^\top B) + \mathrm{Spur}(A_2^\top B) = \Phi_{A_1}(B) + \Phi_{A_2}(B) \\ &= (\Phi_{A_1} + \Phi_{A_2})(B) \end{aligned}$$

Es folgt also $\Phi_{A_1+A_2} = \Phi_{A_1} + \Phi_{A_2}$. Analog gilt

$$\Phi_{\lambda A_1}(B) = \mathrm{Spur}((\lambda A_1)^\top B) = \mathrm{Spur}(\lambda A_1^\top B) = \lambda \mathrm{Spur}(A_1^\top B) = \lambda\Phi_{A_1}(B) = (\lambda\Phi_{A_1})(B)$$

Damit folgt auch hier $\Phi_{\lambda A_1} = \lambda\Phi_{A_1}$, und die Abbildung Φ ist wie behauptet linear.

(ii) Wir zeigen jetzt, dass Φ injektiv ist, indem wir $\mathrm{Kern}\,\Phi = \{O\}$ zeigen. Dies genügt, da V endlichdimensional ist und wegen $\dim V = \dim V^*$ folgt, dass Φ dann auch surjektiv und somit bijektiv ist.
Es seien E_{ij} die Elementarmatrizen, also jene Matrizen, die genau in der j-ten Spalte der i-ten Zeile eine 1 und ansonsten nur Nullen als Einträge haben. Da die E_{ij} eine Basis bilden, ist Φ_A genau dann die Nullabbildung, wenn für alle E_{ij} gilt:

$$0 = \Phi_A(E_{ij}) = \mathrm{Spur}(A^\top E_{ij}).$$

Mit $A = (a_{ij})\,, i, j \in \{1, \ldots, n\}$ rechnen wir nach:

$$\begin{aligned} \Phi_A(E_{ij}) = \mathrm{Spur}(A^\top E_{ij}) &= \mathrm{Spur}(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}) \\ &= \mathrm{Spur}(\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & a_{ij} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{in} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}) = a_{ij} \end{aligned}$$

Also gilt

$$\Phi_A(E_{ij}) = 0 \;\; \forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \, \forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \Leftrightarrow A = O,$$

woraus sich $\mathrm{Kern}\,\Phi = \{O\}$ ergibt.

I.5 (4 Punkte)
Gegeben seien die reellen 4×4-Matrizen der Form

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie für $a = 0, b = 1, c = 0$ und $d = 0$ eine Eigenbasis der entsprechenden Matrix.

b) Bestimmen Sie für $a = 0, b = 0, c = 1$ und $d = 0$ eine Eigenbasis der entsprechenden Matrix.

c) Zeigen Sie, dass es eine Basis des $\mathbb{R}^4$ gibt, die Eigenbasis für alle Matrizen der Form $(*)$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie Schnitträume je eines Eigenraums aus Teil a) mit je einem Eigenraum aus Teil b).

Lösung:
a)
$$\det(A - \lambda E_n) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - 1)^2 = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^2$$

Damit hat A die Eigenwerte 1 und -1. Für $\lambda = 1$ gilt:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \ \wedge \ x_3 = x_4 \ \Leftrightarrow \ x \in \quad E_1 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}].$$

Analog für $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x_1 = -x_2 \ \wedge \ x_3 = -x_4 \ \Leftrightarrow \ x \in \ E_{-1} = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}].$$

Da sich die Dimensionen der beiden Eigenräume zu vier addieren, bildet die Vereinigung der Basen eine Basis aus Eigenvektoren.
b)
$$\det(A - \lambda E_n) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - 1)^2 = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^2$$

Die Eigenräume E'_1 und E'_{-1} zu den Eigenwerten $\lambda = 1$ und $\lambda = -1$ ergeben sich zu

$$E'_1 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}] \text{ und } E'_{-1} = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}]$$

Mit der gleichen Begründung wie in Teil a) bilden die beiden Teilbasen eine Basis aus Eigenvektoren.
c) Für die Schnitte von je einem Eigenraum aus Teil a) mit einem Eigenraum aus Teil b) ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =: z_1 \in E_1 \cap E'_1, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =: z_2 \in E_{-1} \cap E'_1, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} =: z_3 \in E_1 \cap E'_{-1}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =: z_4 \in E_{-1} \cap E'_{-1}.$$

z_1, z_2, z_3 und z_4 sind linear unabhängig, da sich die Basisvektoren aus Teil a) daraus linear als $\frac{1}{2}(z_1 + z_3)$, $\frac{1}{2}(z_1 - z_3)$, $\frac{1}{2}(z_2 + z_4)$ und $\frac{1}{2}(z_2 - z_4)$ kombinieren lassen. Man rechnet jetzt noch leicht nach, dass

$$Az_1 = (a + b + c + d) z_1, \quad Az_2 = (a - b + c - d) z_2, \quad Az_3 = (a + b - c - d) z_3, \quad Az_4 = (a - b - c + d) z_4$$

gilt, womit die vier Vektoren ein Basis aus Eigenvektoren bilden.

I.6 (4 Punkte)

Es sei $V = \mathbb{R}^{2\times 3}$ der Vektorraum der reellen 2×3-Matrizen. In V ist durch

$$\Phi : \begin{cases} V & \rightarrow & V \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a_{11}-a_{21} & a_{12}+a_{22} & 2a_{13}+a_{23} \\ a_{11}+a_{21} & -a_{12}+2a_{22} & a_{13}+4a_{23} \end{pmatrix} \end{cases}$$

ein Endomorphismus gegeben. Bestimmen Sie $\det(\Phi)$.

Lösung:

Eine (geordnete) Basis B des $\mathbb{R}$–Vektorraums V ist durch die Elementarmatrizen

$$\{E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12}, E_{22}, E_{13}, E_{23}\}$$

gegeben. Zur Berechnung der Abbildungsmatrix A von Φ bezüglich B bestimmen wir die erste Spalte. Es gilt

$$\Phi(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1\cdot E_{11} + 1\cdot E_{21} + 0\cdot E_{12} + 0\cdot E_{22} + 0\cdot E_{13} + 0\cdot E_{23},$$

womit die erste Spalte von A gegeben ist durch $(1,1,0,0,0,0)^\top$. Analog findet man die restlichen Spalten der Darstellungsmatrix A von Φ bezüglich B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \det(\Phi) = \det(A) &= \det \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= (1+1)\cdot(2+1)\cdot(8-1) = 2\cdot 3\cdot 7 \\ &= 42. \end{aligned}$$

II.1 (4 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform $\tilde{A}$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3},$$

und geben Sie eine Matrix S an, für die $S^{-1}AS = \tilde{A}$ gilt.

b) Untersuchen Sie, ob es eine Matrix $X \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ gibt, die $X^2 = A$ erfüllt.

Lösung a) Das charakteristische Polynom von A lautet: $\det(A - xE) =$

$$\begin{vmatrix} 3-x & 3 & -1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ -2 & -3 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ -2 & -3 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & -3 & 4-x \end{vmatrix} = (x-1)^2(4-x).$$

Wir bestimmen den Eigenraum zum Eigenwert 1:

$$E_1 := \mathrm{Kern}(A - E) = \left[(1,-1,-1)^\top\right].$$

Es gilt somit $\dim E_1 = 1$, womit für die Jordan'sche Normalform $\tilde{A}$ von A folgt:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung von S benötigen wir noch weitere Informationen:
Für den Eigenraum E_4 zum Eigenwert 4 gilt:

$$E_4 := \mathrm{Kern}(A - 4E) = \left[(1,0,-1)^\top\right].$$

Für den Hauptraum H_1 zum Eigenwert 1 gilt:

$$H_1 = \mathrm{Kern}(A - E)^2 = \left[(0,0,1)^\top, (1,-1,0)^\top\right].$$

Es ergibt sich als mögliche Jordan-Basis:

$$s_1 := (0,0,1)^\top \in H_1 \setminus E_1,\ s_2 := (A-E)s_1 = (-1,1,1)^\top \in E_1,\ s_3 := (1,0,-1)^\top \in E_4.$$

Somit können wir $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ wählen.

b) Wir zeigen zuerst, dass es genau dann eine solche Matrix X gibt, wenn es eine Matrix $\tilde{X}$ mit $\tilde{X}^2 = \tilde{A}$ gibt:

$$X^2 = A \Leftrightarrow S^{-1}X^2S = \tilde{A} \Leftrightarrow (S^{-1}XS)(S^{-1}XS) = \tilde{A}.$$

Mit $\tilde{X} := S^{-1}XS$ folgt die Behauptung.
Es genügt also, die Gleichung $\tilde{X}^2 = \tilde{A}$ auf ihre Lösbarkeit zu untersuchen:

Wir machen den Ansatz $\tilde{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Dann gilt

$$\tilde{X}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \tilde{A} \ \text{ für } \ \mu = \frac{1}{2}.$$

Das heißt, für $\tilde{X} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ gilt $\tilde{X}^2 = \tilde{A}$. Somit genügt $X := S\tilde{X}S^{-1}$ der Gleichung $X^2 = A$.

II.2 (4 Punkte)
Für $n \geq 1$ sei V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$. Für $n+1$ vorgegebene verschiedene reelle Zahlen $x_0, \ldots, x_n$ ist eine Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V gegeben durch

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) g(x_i).$$

a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist.

b) Bestimmen Sie für $n = 2$ und $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ eine Orthonormalbasis von V bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Lösung:
a) Ein Skalarprodukt in einem euklidischen Vektorraum ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform. Bilinearität liegt nach Voraussetzung vor. Wir müssen also die ersten zwei Eigenschaften nachweisen.

- **Symmetrie:** Seien $f, g \in V$ beliebig. Dann gilt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) g(x_i) = \sum_{i=0}^{n} g(x_i) f(x_i) = \langle g, f \rangle,$$

  da $\mathbb{R}$ kommutativ ist.

- **Positive Definitheit:** Sei $f \in V$ beliebig. Dann gilt

$$\langle f, f \rangle = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)^2 \geq 0,$$

  da für jedes i das Quadrat der reellen Zahl $f(x_i)$ größer oder gleich Null ist.
  Falls Gleichheit herrscht, so hat das Polynom f jedes x_i als Nullstelle, also mindestens $n+1$ verschiedene Nullstellen. Da f aber als Element von V höchstens Grad n hat, folgt daraus bereits, dass $f \equiv 0$ gilt. Andererseits erfüllt das Nullpolynom die Bedingung $\langle 0, 0 \rangle = 0$. Also gilt auch die Äquivalenz

$$\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0.$$

  Das ist die positive Definitheit.

Damit haben wir gezeigt, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist.

b) Wir geben mit $\{1, X, X^2\}$ eine Basis B von V an. Um daraus eine ONB $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ zu gewinnen, wenden wir das Orthogonalisierungsverfahren von E. Schmidt an. Wählen wir als den ersten Basisvektor in C:

$$c_1 := \frac{1}{\sqrt{\langle 1, 1 \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Nun berechnen wir aus dem zweiten Basisvektor X in B einen Vektor, der senkrecht auf c_1 steht.

$$\tilde{c}_2 := X - \langle c_1, X \rangle \cdot c_1 = X - \left(\frac{1 \cdot 0}{\sqrt{3}} + \frac{1 \cdot 1}{\sqrt{3}} + \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = X - 1.$$

Nach Normierung wählen wir dann als zweiten Basisvektor:

$$c_2 := \frac{\tilde{c}_2}{\sqrt{\langle \tilde{c}_2, \tilde{c}_2 \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (X - 1).$$

In gleicher Weise gelangen wir zum dritten Basisvektor. Erst finden wir einen Vektor, der orthogonal auf c_1 und auf c_2 steht:

$$\tilde{c}_3 := X^2 - \langle c_1, X^2 \rangle \cdot c_1 - \langle c_2, X^2 \rangle \cdot c_2 = X^2 - \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (X - 1)\right) = X^2 - 2X + \frac{1}{3}.$$

Wir normieren und erhalten den letzten Basisvektor:

$$c_3 := \frac{\tilde{c}_3}{\sqrt{\langle \tilde{c}_3, \tilde{c}_3 \rangle}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \left(X^2 - 2X + \frac{1}{3}\right).$$

Mit den Basisvektoren c_1, c_2, c_3 haben wir wie verlangt eine ONB von V bestimmt.

II.3 (4 Punkte)

Es seien E ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und Φ, Ψ zwei selbstadjungierte Endomorphismen von E. Weiter gelte $\Psi \circ \Phi = 0$ (Nullabbildung). Zeigen Sie:

a) Es gilt auch $\Phi \circ \Psi = 0$.

b) $\text{Bild}(\Phi + \Psi) = \text{Bild}(\Phi) \oplus \text{Bild}(\Psi)$.

Lösung:

a) Für alle $x, y \in E$ gilt

$$\langle(\Phi \circ \Psi)(x), y\rangle = \langle x, (\Phi \circ \Psi)^*(y)\rangle = \langle x, (\Psi^* \circ \Phi^*)(y)\rangle = \langle x, (\Psi \circ \Phi)(y)\rangle = 0$$

Daraus folgt $(\Phi \circ \Psi)(x) = 0$ für alle x, womit auch $\Phi \circ \Psi$ die Nullabbildung ist.

b) Wir zeigen zunächst die Direktheit der Summe, also

$$\text{Bild}(\Phi) \cap \text{Bild}(\Psi) = \{0\},$$

wobei die Inklusion '$\supset$' klar ist.
Für den Nachweis von '$\subset$' nützen wir aus, dass für selbstadjungierte Endomorphismen eine ONB aus Eigenvektoren existiert, wobei die Eigenvektoren zum Eigenwert 0 den Kern, die übrigen Eigenvektoren das Bild aufspannen. Damit gilt

$$(\text{Kern}(\Psi))^\perp = (\text{Bild}(\Psi)) \quad \text{und} \quad (\text{Kern}(\Phi)) = (\text{Bild}(\Phi))^\perp.$$

Mit $\Psi \circ \Phi = 0$ folgt insbesondere $\text{Bild}(\Phi) \subset \text{Kern}(\Psi) = (\text{Bild}(\Psi))^\perp$, also

$$\text{Bild}(\Phi) \cap \text{Bild}(\Psi) \subset \text{Bild}(\Psi)^\perp \cap \text{Bild}(\Psi) = \{0\}.$$

Wir zeigen jetzt

$$\text{Bild}(\Phi + \Psi) = \text{Bild}(\Phi) \oplus \text{Bild}(\Psi).$$

Die Inklusion '$\subset$' gilt wegen

$$(\Phi + \Psi)(v) = \Phi(v) + \Psi(v) \in \text{Bild}(\Phi) \oplus \text{Bild}(\Psi).$$

Für den Nachweis der Inklusion '$\supset$' gilt zunächst wegen der Selbstadjungiertheit $\text{Bild}(\Phi^2) = \text{Bild}(\Phi)$, denn das Bild von Φ wird von Eigenvektoren zu Eigenwerten ungleich 0 erzeugt. Analog gilt $\text{Bild}(\Psi^2) = \text{Bild}(\Psi)$.

Für $v = v_1 + v_2 \in \text{Bild}(\Phi) \oplus \text{Bild}(\Psi)$ gibt es also $u_1 \in \text{Bild}(\Phi)$ mit $v_1 = \Phi(u_1)$ und $u_2 \in \text{Bild}(\Psi)$ mit $v_2 = \Psi(u_2)$. Wegen $u_1 \in \text{Bild}(\Phi)$ gilt mit $\Psi \circ \Phi = 0$ gerade $\Psi(u_1) = 0$. Aus $\Phi \circ \Psi = 0$ ergibt sich analog $\Phi(u_2) = 0$.
Damit gilt insgesamt

$$\begin{aligned} v = v_1 + v_2 &= \Phi(u_1) + \Psi(u_2) = \Phi(u_1) + \underbrace{\Psi(u_1)}_{=0} + \underbrace{\Phi(u_2)}_{=0} + \Psi(u_2) = \\ &= (\Phi + \Psi)(u_1) + (\Phi + \Psi)(u_2) = (\Phi + \Psi)(u_1 + u_2), \end{aligned}$$

also $v \in \text{Bild}(\Phi + \Psi)$.

II.4 (4 Punkte)

Es seien E ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und Φ ein Endomorphismus von E. Die Abbildung Φ heißt *winkeltreu*, wenn sie injektiv ist und für alle $x, y \in E \setminus \{0\}$ gilt:

$$\cos \measuredangle(\Phi(x), \Phi(y)) = \cos \measuredangle(x, y).$$

Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Φ bildet jede Orthonormalbasis auf eine orthogonale Basis ab, wobei die Bildvektoren alle die gleiche Norm besitzen.

(ii) Es existiert ein reelles $\lambda > 0$ mit $\Phi^* \circ \Phi = \lambda \cdot \mathrm{id}_E$.

(iii) Φ ist winkeltreu.

Lösung: (Ringschluss)

$'(i) \Rightarrow (ii)'$: Es sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis von E. Da die $\Phi(b_i)$ eine orthogonale Basis bilden, gilt insbesondere $\|\Phi(b_i)\| > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Wir setzen $\lambda := \|\Phi(b_1)\|^2 = \ldots = \|\Phi(b_n)\|^2$ und errechnen für die orthogonalen Bildvektoren für alle i, j

$$\langle \Phi^* \circ \Phi(b_i), b_j \rangle = \langle \Phi(b_i), \Phi(b_j) \rangle \quad = \quad \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq j \\ \lambda, & \text{falls } i = j \end{cases} \quad = \langle \lambda b_i, b_j \rangle.$$

Damit gilt für ein festes i für alle $j = 1, \cdots, n$ gerade $\langle \Phi^* \circ \Phi(b_i), b_j \rangle = \langle \lambda b_i, b_j \rangle$, woraus sich $\Phi^* \circ \Phi(b_i) = \lambda b_i$ ergibt. Da dies für alle Basisvektoren b_i gilt, folgt $\Phi^* \circ \Phi = \lambda \mathrm{id}_E$.

$'(ii) \Rightarrow (iii)'$: Die Injektivität von Φ ist klar, da $\lambda^{-1}\Phi^*$ nach Voraussetzung Umkehrabbildung von Φ ist. Wir überprüfen die Winkeltreue für Φ:

$$\begin{aligned} \cos\measuredangle(\Phi(x), \Phi(y)) &= \frac{\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle}{\|\Phi(x)\| \cdot \|\Phi(y)\|} \\ &= \frac{\langle (\Phi^* \circ \Phi)(x), y \rangle}{\sqrt{\langle (\Phi^* \circ \Phi)(x), x \rangle}\sqrt{\langle (\Phi^* \circ \Phi)(y), y \rangle}} \\ &= \frac{\lambda \langle x, y \rangle}{\sqrt{\lambda \langle x, x \rangle}\sqrt{\lambda \langle y, y \rangle}} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} = \cos\measuredangle(x, y) \end{aligned}$$

$'(iii) \Rightarrow (i)'$: Sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine ONB von E. Dann sind $\Phi(b_1), \cdots, \Phi(b_n)$ linear unabhängig, weil Φ nach Voraussetzung injektiv ist, und bilden eine Basis von E. Wegen der Winkeltreue sind für $i \neq j$ die Bildvektoren $\Phi(b_i)$ und $\Phi(b_j)$ zueinander senkrecht. Also bilden $\Phi(b_1), \cdots, \Phi(b_n)$ eine orthogonale Basis.

Für $i \neq j$ stehen auch $b_i + b_j$ und $b_i - b_j$ zueinander senkrecht, was sich leicht durch Nachrechnen ergibt:

$$\langle b_i + b_j, b_i - b_j \rangle = \langle b_i, b_i \rangle - \langle b_i, b_j \rangle + \langle b_j, b_i \rangle - \langle b_j, b_j \rangle = 1 - 0 + 0 - 1 = 0.$$

Wieder wegen der Winkeltreue gilt dies auch für $\Phi(b_i + b_j)$ und $\Phi(b_i - b_j)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Phi(b_i + b_j), \Phi(b_i - b_j) \rangle \\ &= \langle \Phi(b_i), \Phi(b_i) \rangle - \langle \Phi(b_i), \Phi(b_j) \rangle + \langle \Phi(b_j), \Phi(b_i) \rangle - \langle \Phi(b_j), \Phi(b_j) \rangle \\ &= \|\Phi(b_i)\|^2 - \|\Phi(b_j)\|^2, \end{aligned}$$

weshalb die Bildvektoren alle gleiche Norm besitzen.

II.5 (4 Punkte)

Es seien U ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und Φ ein Endomorphismus von U mit $\Phi^* = -\Phi$. Zeigen Sie:

a) Φ ist normal und alle Eigenwerte von Φ haben Realteil Null.

b) $\Phi - \mathrm{id}_U$ ist bijektiv und $(\Phi - \mathrm{id}_U)^{-1} \circ (\Phi + \mathrm{id}_U)$ ist eine Isometrie.

Lösung:

a) Es gilt

$$\Phi^* \circ \Phi = (-\Phi) \circ \Phi = \Phi \circ (-\Phi) = \Phi \circ \Phi^*,$$

also ist Φ normal. Nach dem Satz über die Normalform für normale Endomorphismen gibt es eine ONB B von U und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ so, dass die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich B Diagonalgestalt hat

$$D_{B\,B}(\Phi) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \mathrm{diag}(\alpha_1 + i\beta_1, \ldots, \alpha_n + i\beta_n).$$

Wegen

$$\mathrm{diag}(-\alpha_1 - i\beta_1, \ldots, -\alpha_n - i\beta_n) = D_{B\,B}(-\Phi) = D_{B\,B}(\Phi^*) = \mathrm{diag}(\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n}) = \mathrm{diag}(\alpha_1 - i\beta_1, \ldots, \alpha_n - i\beta_n)$$

gilt $\alpha_i = 0$ und die Realteile der λ_i sind alle Null. Die λ_i sind aber gerade die Eigenwerte von Φ.

b) Die Abbildungsmatrix von $\Phi - \mathrm{id}_U$ bezüglich B ist

$$\mathrm{diag}(\lambda_1 - 1, \ldots, \lambda_n - 1).$$

Da die Realteile der λ_i alle Null sind, sind alle $\lambda_i - 1 \neq 0$ und $\Phi - \mathrm{id}_U$ folglich bijektiv. Die Abbildungsmatrix von $(\Phi - \mathrm{id}_U)^{-1}(\Phi + \mathrm{id}_U)$ bezüglich B ist

$$\mathrm{diag}((\lambda_1 - 1)^{-1}, \ldots, (\lambda_n - 1)^{-1}) \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1 + 1, \ldots, \lambda_n + 1) = \mathrm{diag}(\frac{\lambda_1 + 1}{\lambda_1 - 1}, \ldots, \frac{\lambda_n + 1}{\lambda_n - 1}).$$

Da die Realteile der λ_i Null sind gilt

$$\left| \frac{\lambda_i + 1}{\lambda_i - 1} \right| = \frac{\sqrt{\mathrm{Im}(\lambda_i)^2 + 1}}{\sqrt{\mathrm{Im}(\lambda_i)^2 + 1}} = 1.$$

Also haben alle Eigenwerte den Betrag Eins und damit ist $(\Phi - \mathrm{id}_U)^{-1}(\Phi + \mathrm{id}_U)$ eine Isometrie, denn B ist orthonormal.

II.6 (4 Punkte)

In der affinen Ebene $\mathbb{R}^2$ seien die Quadrik

$$\mathcal{Q} : \xi_1\xi_2 = 1$$

gegeben sowie eine Schar von Quadriken

$$\mathcal{Q}_\alpha : \alpha\xi_1^2 - \alpha\xi_1\xi_2 + \frac{1}{4}(\alpha - \frac{1}{4})\xi_2^2 + \alpha^2 = 0$$

mit einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{Q}_\alpha$ gleiche Normalform haben.

Lösung:
Normalform von Q:

$$\begin{aligned}
\xi_1\xi_2 &= \frac{1}{4}(2\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_2) \\
&= \frac{1}{4}\big((\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2) - (\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2)\big) \\
&= \frac{1}{4}\big((\xi_1 + \xi_2)^2 - (\xi_1 - \xi_2)^2\big)
\end{aligned}$$

Mit $\eta_1 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2)$ und $\eta_2 = \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2)$ hat Q die Normalform

$$\eta_1^2 - \eta_2^2 = 1 \qquad\qquad \text{(Hyperbel).}$$

Normalform von Q_α:

$$\begin{aligned}
&\alpha\xi_1^2 - \alpha\xi_1\xi_2 + \frac{1}{4}(\alpha - \frac{1}{4})\xi_2^2 + \alpha^2 = \\
&= \alpha\left(\xi_1^2 - 2\xi_1\frac{\xi_2}{2} + \left(\frac{\xi_2}{2}\right)^2\right) - \alpha\left(\frac{\xi_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}(\alpha - \frac{1}{4})\xi_2^2 + \alpha^2 \\
&= \alpha\left(\xi_1 - \frac{\xi_2}{2}\right)^2 - \frac{1}{16}\xi_2^2 + \alpha^2 = \alpha\left(\xi_1 - \frac{\xi_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{\xi_2}{4}\right)^2 + \alpha^2.
\end{aligned}$$

Die Gleichung von Q_α kann man also schreiben als

$$\left(\frac{\xi_2}{4}\right)^2 - \alpha\left(\xi_1 - \frac{\xi_2}{2}\right)^2 = \alpha^2$$

Falls $\alpha = 0$, ist Q_α durch $\xi_2^2 = 0$ (Gerade) gegeben, hat also eine andere Normalform als Q.
Falls $\alpha \neq 0$, ist Q_α durch

$$\left(\frac{\xi_2}{4\alpha}\right)^2 - \frac{1}{\alpha}\left(\xi_1 - \frac{\xi_2}{2}\right)^2 = 1$$

gegeben. Ist $\alpha < 0$, dann ist Q_α vom Typ $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = 1$ (Ellipse), und die Normalformen sind verschieden.
Ist $\alpha > 0$, so ist

$$\zeta_1^2 - \zeta_2^2 = 1$$

mit $\zeta_1 := \frac{\xi_2}{4\alpha}$, $\zeta_2 := \frac{\xi_1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\xi_2}{2\sqrt{\alpha}}$ die Normalform von Q_α und stimmt mit der Normalform von Q überein.

Insgesamt: Normalformen stimmen überein $\Leftrightarrow$ $\alpha > 0$.