Aufgabe I.1 (4 Punkte)

Es seien $(G, \circ)$ und $(H, *)$ Gruppen.

a) Wann heißt eine Abbildung $\Phi : G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus?

b) Es seien $\Phi, \Psi : G \longrightarrow H$ zwei Gruppenhomomorphismen. Zeigen Sie, dass

$$U := \{g \in G \mid \Phi(g) = \Psi(g)\}$$

eine Untergruppe von G ist.

c) Es sei $G = H = S_3$ die Gruppe der Permutationen von $\{1, 2, 3\}$. Finden Sie einen Homomorphismus $\Phi : S_3 \longrightarrow S_3$, für den die Untergruppe

$$\{g \in S_3 \mid \Phi(g) = g\}$$

genau zwei Elemente enthält.

Lösung:

a) Die Abbildung $\Phi : G \longrightarrow H$ ist ein Gruppenhomomorphismus von $(G, \circ)$ nach $(H, *)$, wenn für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt:

$$\Phi(g_1 \circ g_2) = \Phi(g_1) * \Phi(g_2).$$

b) Da Φ ein Gruppenhomomorphismus ist, ist $\Phi(e_G)$ das neutrale Element von H; dasselbe gilt für $\Psi(e_G)$. Daher gilt $e_G \in U$, und U ist nicht leer.

Weiter gilt für $g \in U$ auch $\Phi(g^{-1}) = (\Phi(g))^{-1}$ (analog auch für Ψ),

$$\forall g_1, g_2 \in U : \ \Phi(g_1 \circ g_2^{-1}) = \Phi(g_1) * (\Phi(g_2))^{-1} \overset{g_1,g_2 \in U}{=} \Psi(g_1) * (\Psi(g_2))^{-1} = \Psi(g_1 \circ g_2^{-1}),$$

also $g_1 \circ g_2^{-1} \in U$.

Wir dürfen also das Untergruppenkriterium anwenden, und es folgt, dass U eine Untergruppe von G ist.

c) Es sei $\tau \in S_3$ die Transposition, die 1 und 2 vertauscht:

$$\tau(1) := 2, \ \tau(2) := 1, \ \tau(3) := 3.$$

Es gilt $\tau^2 = \mathrm{id}(:= e_{S_3})$, und daher ist $U := \{\mathrm{id}, \tau\}$ eine Untergruppe von S_3 mit zwei Elementen. Wir benutzen den Signaturhomomorphismus

$$\mathrm{sgn} : S_3 \longrightarrow \{1, -1\}.$$

Es gilt $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$, und damit ist $\mathrm{sgn}|_U$ ein Isomorphismus von U auf die Gruppe $\{1, -1\}$. Die Umkehrabbildung nennen wir Ξ.

Nun definieren wir den Homomorphismus $\Phi : S_3 \longrightarrow S_3$ als Komposition von Ξ und sgn:

$$\forall \sigma \in S_3 : \Phi(\sigma) := \Xi(\mathrm{sgn}(\sigma)).$$

Dann gilt

$$\Phi(\sigma) = \begin{cases} \mathrm{id}, & \text{falls } \mathrm{sgn}(\sigma) = 1, \\ \tau, & \text{falls } \mathrm{sgn}(\sigma) = -1, \end{cases}$$

und $\Phi(\sigma) = \sigma \Leftrightarrow \sigma = \mathrm{id}, \tau$. Somit ist

$$\{\sigma \in S_3 \mid \Phi(\sigma) = \sigma\}\{\mathrm{id}, \tau\} = U.$$

Aufgabe I.2 (4 Punkte)

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & \mathbb{R}^{2\times 2} & \to & \mathbb{R}^{2\times 2} \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ b-c & a-d \end{pmatrix}. \end{array}$$

a) Bestimmen Sie Kern Φ.

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich der Basis

$$B := (\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$$

des $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Lösung:

a) Aus der Definition von Φ ergibt sich sofort

$$\Phi(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ b-c & a-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad a = b,\ b = c,\ c = d,\ d = a.$$

Also gilt:

$$\text{Kern}\,\Phi = \{\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

b) Wir bestimmen zunächst die Abbildungsmatrix A von Φ bezüglich der geordneten Basis

$$B' := (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

Einsetzen der einzelnen Basisvektoren in Φ liefert

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Basiswechselmatrix von B zu B' ist gegeben durch

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und somit ist die Abbildungsmatrix $\tilde{A}$ von Φ bezüglich B gerade

$$\tilde{A} = S^{-1}AS.$$

Mittels des Gauss-Algorithmus berechnet man

$$S^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

und wir erhalten

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe I.3 (4 Punkte)

Es seien V ein Vektorraum und $\Pi : V \to V$ eine Projektion, das heißt ein Endomorphismus von V mit $\Pi^2 = \Pi$. Weiter sei $\Phi : \Pi(V) \to \Pi(V)$ ein Isomorphismus. Zeigen Sie, dass für den durch $\Psi(x) := \Phi(\Pi(x))$, $x \in V$, definierten Endomorphismus von V gilt:

a) $V = \operatorname{Kern}\Psi \oplus \operatorname{Bild}\Psi$.

b) Ψ ist genau dann eine Projektion, wenn Φ die Identität ist.

Lösung:

a) Φ ist injektiv, also gilt:

$$\Psi(x) = \Phi(\Pi(x)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Pi(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \operatorname{Kern}\Pi.$$

Somit ist Kern Ψ = Kern Π.

Φ ist außerdem surjektiv, woraus sofort Bild $\Psi = \Pi(V) =$ Bild Π folgt.

Da Π Projektion ist, gilt $V = \operatorname{Kern}\Pi \oplus \operatorname{Bild}\Pi$, und es folgt die Behauptung.

b) Falls $\Phi = id_V$ ist, so gilt $\Psi = \Pi$, also ist Ψ Projektion.

Es sei also Ψ eine Projektion. Falls $\Phi \neq id_{\Pi(V)}$ gilt, so existiert ein $y \in \Pi(V)$ mit der Eigenschaft $\Phi(y) \neq y$. Da Φ injektiv ist, folgt daraus $\Phi(\Phi(y)) \neq \Phi(y)$. Weil außerdem $\Pi(z) = z$ für alle $z \in \Pi(V)$ ist, ergibt sich deshalb

$$\Psi^2(y) = \Phi(\Pi(\Phi(\Pi(y)))) = \Phi(\Phi(y)) \neq \Phi(y) = \Phi(\Pi(y)) = \Psi(y),$$

und Ψ wäre keine Projektion.

Aufgabe I.4 (4 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Zu einem Untervektorraum U von V definieren wir den Untervektorraum

$$U^0 := \{x^* \in V^* \mid x^*(u) = 0 \,\text{für alle}\, u \in U\}$$

von des Dualraums V^* von V. Es seien nun U, W Untervektorräume von V mit $U \cap W = \{0\}$. Zeigen Sie:

a) Für alle $w \in W \setminus \{0\}$ existiert ein $x^* \in U^0$, sodass $x^*(w) \neq 0$ ist.

b) $V^* = U^0 + W^0$.

c) $V^* = U^0 \oplus W^0 \iff V = U \oplus W$.

Lösung: Sei $\dim V =: n$ in dieser Aufgabe.

a) Wir ergänzen $w =: b_1$ zu einer Basis $\{b_1, \ldots, b_p\}$ von W. Sei weiter $\{b_{p+1}, \ldots, b_q\}$ eine Basis von U. Wegen $U \cap W = \{0\}$ ist dann die Vereinigung $\{b_1, \ldots, b_q\}$ eine Basis von $U + W$. Wir ergänzen diese weiter zu einer Basis von V und erhalten $\{b_1, \ldots, b_q, b_{q+1}, \ldots, b_n\}$. Bezeichnen wir mit $\{b_1^*, \ldots, b_n^*\}$ die zugehörige Dualbasis des Dualraums V^* von V, so gilt:
$$b_1^*(w) = b_1^*(b_1) = 1 \neq 0 \text{ und } b_1^*(b_j) = 0 \text{ für } j = p+1, \ldots, q.$$
. Damit ist $b_1^*(u) = 0$ für alle $u \in U$. Mit $x^* := b_1^*$ folgt also die Behauptung.

b) Wegen $U^0, W^0 \subset V^*$ genügt es zu zeigen, dass $\dim(U^0 + W^0) = \dim V^* = n$ gilt.
Aus dem Aufgabenteil (a) können wir folgern, dass $\{b_1^*, \ldots, b_p^*, b_{q+1}^*, \ldots, b_n^*\}$ eine Basis von U^0 ist: Einerseits liegen diese Vektoren alle in U^0 und sind linear unabhängig, andererseits lässt sich jede Linearform $\varphi \in U^0$ als Linearkombination $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i^*$ schreiben. Wegen $\lambda_j = \varphi(b_j) = 0$ für alle $j = p+1, \ldots, q$ folgt die Zwischenbehauptung.
Analog folgt, dass $\{b_{p+1}^*, \ldots, b_n^*\}$ bzw. $\{b_{q+1}^*, \ldots, b_n^*\}$ Basen von W^0 bzw. $U^0 \cap W^0$ sind. Mit dem Dimensionssatz ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \dim(U^0 + W^0) &= \dim U^0 + \dim W^0 - \dim(U^0 \cap W^0) \\ &= (n - \dim U) + (n - \dim W) - (n - \dim U - \dim W) = n. \end{aligned}$$

c) Nach Aufgabenteil (b) ist die Aussage $V^* = U^0 \oplus W^0$ äquivalent zu $\dim(U^0 \cap W^0) = 0$. Dies ist aufgrund der Rechnung in (b) äquivalent zu $n = \dim U + \dim W$. Wegen der Voraussetzung $U \cap W = \{0\}$ gilt dies genau dann, wenn $V = U \oplus W$.

Aufgabe I.5 (4 Punkte)

Gegeben sei die komplexe Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

a) Zeigen Sie: Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist A stets diagonalisierbar.

b) Bestimmen Sie für $(a, b, c) = (1, 0, 7)$ die Diagonalform $\widetilde{A}$ von A, sowie eine Matrix S mit $S^{-1}AS = \widetilde{A}$.

c) Zeigen Sie: Für $(a, b, c) = (0, 1, i)$ ist A nicht diagonalisierbar.

Lösung:

a) Die Matrix A ist reell und symmetrisch, somit ist A sogar über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar. (Spektralsatz!)

b) Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom lautet dann $\det(A - xE) = \cdots = -(x+6)(x-1)(x-8)$ und die Diagonalform ist

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Um eine Matrix S zu bestimmen, benötigen wir die Eigenräume. Diese kann man jedoch leicht erkennen, wenn man sich die Matrix A genau anschaut (ansonsten sind die Rechnungen auch nicht schwierig). Es gilt: $E_{-6} = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}], E_1 = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}]$ und $E_8 = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$.

Wir können somit

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wählen.

c) Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom lautet dann $\det(A - xE) = -x^3$. Das heißt, 0 ist der einzige Eigenwert von A. Da A offensichtlich nicht die Nullmatrix ist, kann A somit nicht diagonalisierbar sein.

Aufgabe I.6 (4 Punkte)

Gegeben sei die reelle $n \times n$-Matrix $A_n = (a_{ij})$ durch

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 1 \text{ oder } j = 1 \\ a_{i-1,j} + a_{i,j-1} & \text{für } i > 1 \text{ und } j > 1 \end{cases}$$

Berechnen Sie $\det A_n$ zunächst für $n = 5$ und dann allgemein.

Lösung: Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
\det A_1 &= \det\begin{pmatrix}1\end{pmatrix} = 1 \\
\det A_2 &= \det\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 1 & 2\end{pmatrix} = 2 - 1 = 1 \\
\det A_3 &= \det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} = \det A_2 = 1
\end{aligned}$$

Dies führt zu der Behauptung, dass $\det A_n = 1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere die Berechnung von $\det A_3$ zeigt, wie man in einem Induktionsschluss $\det A_n$ aus $\det A_{n-1}$ berechnen kann. Wir führen dies aus und haben damit nach dem Prinzip der vollständigen Induktion die Behauptung bewiesen.

$$\begin{aligned}
\det A_n &= \det(a_{ij}) \\
&= \det\begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 2 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
1 & i-1 & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
1 & i & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
\vdots & & & & & & \vdots & \\
1 & n & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
= \quad \det \begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & 1 & \cdots & j-2 & j-1 & j & \cdots & n-1 \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
0 & 1 & \cdots & a_{i-1,j-2} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n-1} \\
0 & 1 & \cdots & a_{i,j-2} & a_{i,j-1} & a_{i,j1} & \cdots & a_{i,n-1} \\
\vdots & & & & & & \vdots & \\
0 & 1 & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n-1}
\end{pmatrix}
$$

$$
= \quad \det \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
0 & 1 & \cdots & a_{i-2,j-2} & a_{i-2,j-1} & a_{i-2,j} & \cdots & a_{i-2,n-1} \\
0 & 1 & \cdots & a_{i-1,j-2} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j1} & \cdots & a_{i-1,n-1} \\
\vdots & & & & & & \vdots & \\
0 & 1 & \cdots & a_{n-1,j-1} & a_{n-1,j} & a_{n-1,j} & \cdots & a_{n-1,n-1}
\end{pmatrix} = \det A_{n-1}
$$

Hierbei wurde jeweils die Rekursion verwendet, und zwar bei den Zeilenumformungen in der Form $a_{i,j} - a_{i-1,j} = a_{i,j-1}$ bzw. bei den Spaltenumformungen als $a_{i,j} - a_{i,j-1} = a_{i-1,j}$.

Aufgabe II.1 (4 Punkte)

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform $\tilde{A}$ von A.

b) Zeigen Sie, dass es keine zu A ähnliche Matrix B mit der Eigenschaft

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gibt.

Lösung:

a) Für das charakteristische Polynom p von A gilt:

$$p = \begin{vmatrix} 2-X & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}-X & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2}-X & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)(2-X)^3.$$

Der Jordanblock zum Eigenwert 1 hat also die Länge 1.

Der Eigenraum E_2 zum Eigenwert 2 ist Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Die letzte Matrix hat offensichtlich Rang 3, also gilt $\dim E_2 = 1$. Damit gibt es genau ein Jordankästchen im Jordanblock zum Eigenwert 2. Deshalb ist die Jordan'sche Normalform

$\tilde{A}$ von A gegeben durch

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Da B ähnlich zu A sein soll, ist B auch ähnlich zu $\tilde{A}$. Es exitiert also eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit der Eigenschaft $B = S^{-1}\tilde{A}S$. Für B^2 ergibt sich daraus $B^2 = S^{-1}\tilde{A}^2S$; B^2 ist also ähnlich zu $\tilde{A}^2$, insbesondere haben also beide diesselbe Jordan'sche Normalform.

Nun gilt aber

$$\tilde{A}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit besitzt $\tilde{A}^2$ das charakteristische Polynom $(1-X)(4-X)^3$.

In der Jordan'schen Normalform von $\tilde{A}^2$ (und B^2) hat der Jordanblock zum Eigenwert 4 also die Länge 3.

E_4 ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

hat also offensichtlich Dimension 1. Damit ist die Jordan'sche Normalform von $\tilde{A}$ (und B^2) gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da andererseits die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ebenfalls in Jordan'scher Normalform ist, und diese nicht mit der von $\tilde{A}$ übereinstimmt, kann es keine zu A ähnlich Matrix mit der gesuchten Eigenschaft geben.

Aufgabe II.2 (4 Punkte)

Es seien V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $U \neq V$ ein Untervektorraum von V und Π die Orthogonalprojektion von V auf U. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) $\dim U = \dim V - 1$.

b) Für alle $x, y \in V$ mit $\langle x, y\rangle = 0$ und $\langle \Pi(x), \Pi(y)\rangle = 0$ gilt $x \in U$ oder $y \in U$.

Lösung:

(a)⇒(b) Es gilt $V = U \oplus U^\perp$ und deshalb

$$\dim V \;=\; \dim U + \dim U^\perp \;=\; \dim V - 1 + \dim U^\perp .$$

Hieraus ergibt sich $\dim U^\perp = 1$. Seien nun $x, y \in V$ beliebig. Wegen $x = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in U^\perp$ gilt $\Pi(x) = u$ und $x - \Pi(x) = w \in U^\perp$. Ebenso ist $y - \Pi(y) \in U^\perp$.

Gilt nun

$$\langle x, y\rangle \;=\; \langle \Pi(x), \Pi(y)\rangle \;=\; 0,$$

so ergibt sich

$$0 \;=\; \langle x, y\rangle \;=\; \langle x - \Pi(x) + \Pi(x), y - \Pi(y) + \Pi(y)\rangle \;=$$
$$\langle x - \Pi(x), y - \Pi(y)\rangle + \langle x - \Pi(x), \Pi(y)\rangle + \langle \Pi(x), y - \Pi(y)\rangle + \langle \Pi(x), \Pi(y)\rangle \;=$$
$$\langle x - \Pi(x), y - \Pi(y)\rangle + \langle \Pi(x), \Pi(y)\rangle \;=\; \langle x - \Pi(x), y - \Pi(y)\rangle.$$

Wegen $x - \Pi(x), y - \Pi(y) \in U^\perp$ und $\dim U^\perp = 1$ sind $x - \Pi(x)$ und $y - \Pi(y)$ linear abhängig, sodass aus der letzten Gleichung $x - \Pi(x) = 0$ oder $y - \Pi(y) = 0$ folgt. Dies ist aber gleichbedeutend mit $x = \Pi(x) \in U$ oder $y = \Pi(y) \in U$.

(b)⇒(a) Wir müssen zeigen, dass $\dim U^\perp = 1$. Die Gleichung $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$ liefert dann die Behauptung.
Wir nehmen $\dim U^\perp \neq 1$ an. Wegen $U \neq V$ ist dann $\dim U^\perp \geq 2$. Also gibt es $x, y \in U^\perp \setminus \{0\}$ mit $\langle x, y\rangle = 0$. Wegen $\Pi(x) = \Pi(y) = 0$ gilt $\langle \Pi(x), \Pi(y)\rangle = 0$. Nach Voraussetzung folgt damit $x \in U$ oder $y \in U$. Wegen $U \cap U^\perp = \{0\}$ ergibt sich $x = 0$ oder $y = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Es muss also $\dim U^\perp = 1$ gelten.

Aufgabe II.3 (4 Punkte)

Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ versehen mit dem Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Weiter sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Endomorphismus mit Abbildungsmatrix A bezüglich der Standardbasis.

a) Zeigen Sie:
$$(\forall\, x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \Phi(x)\rangle = 0) \quad \Longrightarrow \quad A = -A^\top.$$

b) Seien $A = -A^\top$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie:
$$U \text{ ist } \Phi - \text{invariant} \quad \Longleftrightarrow \quad U^\perp \text{ ist } \Phi - \text{invariant}.$$

Lösung:

a) Es bezeichne $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ die Standardbasis und $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$. Dann gilt für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:
$$\langle e_i, \Phi(e_j)\rangle \;=\; \langle e_i, \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k\rangle \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\langle e_i, e_k\rangle \;=\; a_{ij}\langle e_i, e_i\rangle \;=\; a_{ij}.$$
Es gelte nun für alle $x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \Phi(x)\rangle = 0$. Mit $x = e_i$ folgt hieraus direkt
$$0 \;=\; \langle e_i, \Phi(e_i)\rangle \;=\; a_{ii}.$$
Seien nun $1 \le i < j \le n$. Dann folgt
$$\begin{aligned} 0 \;=\; \langle e_i + e_j, \Phi(e_i + e_j)\rangle \;=\; \langle e_i + e_j, \Phi(e_i) + \Phi(e_j)\rangle \;=\; \\ \langle e_i, \Phi(e_i)\rangle \;+\; \langle e_i, \Phi(e_j)\rangle \;+\; \langle e_j, \Phi(e_i)\rangle \;+\; \langle e_j, \Phi(e_j)\rangle \;=\; \\ a_{ii} + a_{ij} + a_{ji} + a_{jj} \;=\; a_{ij} + a_{ji}. \end{aligned}$$
Es ergibt sich also $a_{ij} = -a_{ji}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, mithin $A = -A^\top$.

b) $\Rightarrow$-Richtung: Es bezeichne Φ^* die zu Φ adjungierte Abbildung. Nach Voraussetzung gilt $\Phi^* = -\Phi$. Sei nun U Φ-invariant und $x \in U^\perp$ beliebig. Dann gilt für alle $u \in U$:
$$\langle u, \Phi(x)\rangle \;=\; \langle \Phi^*(u), x\rangle \;=\; \langle -\Phi(u), x\rangle \;=\; \langle \Phi(-u), x\rangle \;=\; 0$$
da $\Phi(-u) \in U$. Also gilt $\Phi(x) \in U^\perp$.
$\Leftarrow$-Richtung: Wir haben eben gesehen dass, aus der Φ-Invarianz von $U^\perp$ die Φ-Invarianz von $\left(U^\perp\right)^\perp$ folgt. Wegen $\left(U^\perp\right)^\perp = U$ folgt damit bereits die Behauptung.

Aufgabe II.4 (4 Punkte)

Im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt) sei bezüglich der Standardbasis ein Endomorphismus Φ von $\mathbb{R}^3$ durch die Abbildungsmatrix

$$A := \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4}\sqrt{6} & \frac{1}{4}\sqrt{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass Φ eine Isometrie ist.

b) Bestimmen Sie die euklidische Normalform von Φ.

c) Geben Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ an, bezüglich der Φ die Normalform annimmt.

Lösung:

a) Rechne nach $AA^\top = E$.

b) Berechne die Eigenwerte von

$$A + A^\top = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: B:$$

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\frac{3}{2} - \lambda)^2(1 - \lambda) - \frac{1}{4}(1 - \lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

$\Phi + \Phi^*$ hat den Eigenwert 2 mit der Vielfachheit 1 $\Leftrightarrow$ Φ hat den Eigenwert 1 mit der Vielfachheit 1.

$\Phi + \Phi^*$ hat den Eigenwert 1 mit der Vielfachheit 2 $\Leftrightarrow$ in der Normalform von Φ tritt genau $2/2 = 1$ Drehkästchen der Gestalt $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ auf. Die Normalform von Φ lautet also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

c) Sei $E_{c=2}$ der Eigenraum von $\Phi + \Phi^*$ zum EW 2, dann ist $\{x_1\}$ mit $x_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^\top$ eine ONB von $E_{c=2}$ (Bestimme dazu Kern$(B - 2E)$ =Kern$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$). $\{x_1\}$ ist eine ONB des Eigenraums $E_{c=1}$ von Φ zum EW 1.

Wir bestimmen nun ein v_2 im Eigenraum von $\Phi + \Phi^*$ zum EW 1 mit $\|v_2\| = 1$:
Kern$(B - 1 \cdot E)$ =Kern$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} =: v_2 \right]$. Sei $v_3 := \Phi(v_2) =$

$(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2})^\top$. Wir ergänzen nun $x_2 := v_2$ mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren zu einer ONB $\{x_2, x_3\}$ von $[v_2, v_3]$. Es ergibt sich $x_3 = (0, 0, 1)^\top$. Die gesuchte ONB lautet also

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe II.5 (4 Punkte)

Es sei V ein n-dimensionaler unitärer Vektorraum. Zeigen Sie:

a) Für jeden normalen Endomorphismus Φ von V lässt sich der zu Φ adjungierte Endomorphismus Φ^* als Polynom von Φ schreiben. Genauer gilt:

$$\exists a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}: \quad \Phi^* = \sum_{i=0}^{n} a_i \Phi^i.$$

b) Sind Φ, Ψ zwei normale Endomorphismen mit $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$, so ist der Endomorphismus $\Phi \circ \Psi$ normal.

Lösung:

a) Da Φ normal ist, gibt es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren (Spektralsatz für normale Endomorphismen). Wir wählen solch eine Orthonormalbasis $\{b_1, \ldots, b_n\}$, und bezeichnen mit $c_j \in \mathbb{C}$ die zugehörigen Eigenwerte:

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} : \Phi(b_j) = c_j b_j.$$

Bekanntlich gilt für die adjungierte Abbildung Φ^* dann

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} : \Phi^*(b_j) = \overline{c_j} b_j,$$

wobei $\overline{c_j}$ die zu c_j konjugiert komplexe Zahl ist.

Wegen der Lagrange-Interpolationsformel gibt es ein komplexes Polynom $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, das ausgewertet bei den Zahlen c_j die Werte $\overline{c_j}$ annimmt.

Dann gilt für jeden Basisvektor b_j:

$$(\sum_{i=0}^{n} a_i \Phi^i)(b_j) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\Phi^i(b_j)) = \sum_{i=0}^{n} a_i(c_j^i \cdot b_j) = (\sum_{i=0}^{n} a_i c_j^i) \cdot b_j = \overline{c_j} \cdot b_j = \Phi^*(b_j).$$

Die zwei Endomorphismen Φ^* und $\sum_{i=0}^{n} a_i \Phi^i$ stimmen also auf einer Basis überein, und sind damit gleich.

b) Aus $\Phi \circ \Psi$ folgt per Induktion sofort, dass für alle ganzen Zahlen $i \geq 0$ gilt:

$$\Phi^i \circ \Psi = \Psi \circ \Phi^i.$$

Nach Teil a) können wir Φ^* schreiben als $\sum_{i=0}^{n} a_i \Phi^i$, für geeignete $a_i \in \mathbb{C}$. Es folgt

$$\begin{aligned} \Phi^* \circ \Psi \quad &= (\textstyle\sum_{i=0}^{n} a_i \Phi^i) \circ \Psi = \sum_{i=0}^{n} a_i (\Phi^i \circ \Psi) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{n} a_i (\Psi \circ \Phi^i) = \Psi \circ (\sum_{i=0}^{n} a_i \Phi^i) \\ &= \Psi \circ \Phi^*. \end{aligned}$$

Analog gilt auch $\Phi \circ \Psi^* = \Psi^* \circ \Phi$. Das führt zu

$$\begin{aligned} (\Phi \circ \Psi) \circ (\Phi \circ \Psi)^* \quad &= (\Phi \circ \Psi) \circ (\Psi^* \circ \Phi^*) = \Psi^* \circ (\Phi \circ \Psi) \circ \Phi^* \\ &= \Psi^* \circ \Phi^* \circ (\Phi \circ \Psi) \\ &= (\Phi \circ \Psi)^* \circ (\Phi \circ \Psi), \end{aligned}$$

und das sagt laut Definition gerade, dass $\Phi \circ \Psi$ normal ist.

Aufgabe II.6 (4 Punkte)

In einem reellen dreidimensionalen affinen Raum
R^3 seien bezüglich des Standardkoordinatensystems eine Quadrik $\mathcal{Q}$ gegeben durch

$$\mathcal{Q} : 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \;=\; 0.$$

(a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ liegt der Punkt $(0, 1, a)$ auf der Quadrik?

(b) Bestimmen Sie die affine Normalform von $\mathcal{Q}$ und geben Sie ein affines Koordinatensystem an, bezüglich dessen $\mathcal{Q}$ die Normalform annimmt.

Lsung:

(a): $(0, 1, a) \in \mathcal{Q} \iff 2 - a^2 + 2 + 2a = 0 \iff a^2 - 2a - 4 = 0 \iff a = 1 \pm \sqrt{5}.$

(b): Normalform von $\mathcal{Q}$:

$$2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \;=\; 0$$

Quadratische Ergänzung ergibt

$$2[x_2^2 + x_2(x_1+1) + (\frac{x_1+1}{2})^2] - 2(\frac{x_1+1}{2})^2 - [x_3^2 + 2x_3(x_1-1) + (x_1-1)^2] + (x_1-1)^2 + 2x_1 = 0$$

Daraus folgt

$$2(x_2 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2})^2 - (x_3 + x_1 - 1)^2 + \frac{1}{2}(x_1 - 2x_1 + 1)^2 = 0,$$

also

$$2(x_2 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2})^2 - (x_3 + x_1 - 1)^2 + \frac{1}{2}(x_1 - 1)^2 = 0.$$

Mittels der affinen Abbildung φ, die durch

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{2}(\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \sqrt{2}x_2 + \tfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - 1) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y_3 &= x_1 + x_3 - 1 \end{aligned}$$

gegeben ist, erhalten wir die Normalform von $\varphi(\mathcal{Q})$ im gegebenen Koordinatensystem

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0,$$

also ist $\mathcal{Q}$ ein Kegel.
$\mathcal{Q}$ selbst nimmt diese Normalform bezglich des neuen Koordinatensystems $(\varphi^{-1}(O); \Phi^{-1}(e_1), \Phi^{-1}(e_2), \Phi^{-1}(e_3)$ an, wobei Φ die zu φ gehörende lineare Abbildung ist.

Bezglich der Standardbasis gehört zu Φ die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also zu Φ^{-1} die Abbildungsmatrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt für φ^{-1}

$$\varphi^{-1}(x) = A^{-1}x - A^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 \end{pmatrix} = A^{-1}x + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit lautet das gesuchte Koordinatensystem

$$(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}).$$